GERHARD GENTZEN

Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung

---

Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie

1969

WISSENSCHAFTLICHE BUCHGESELLSCHAFT
DARMSTADT

Reihe »Libelli« BAND CCIX*

Unveränderter reprografischer Nachdruck der Ausgabe Leipzig 1938
(= Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften.
Neue Folge, 4)

Bestellnummer: 4869

Druck und Einband: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis.

Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.

Von Gerhard Gentzen in Göttingen.

§ 1. Die verschiedenen Standpunkte zur Frage der Antinomien und des Unendlichkeitsbegriffs.

Die Antinomien der Mengenlehre sind vor rund 40 Jahren entdeckt worden, und bis heute ist eine endgültige Klärung dieser Angelegenheit nicht erreicht worden. Die mathematische Grundlagenforschung verdankt diesem Problem einen großen Auftrieb. Die an dieser Stelle deutlich zutage tretende Unsicherheit gewisser Grundlagen der Mathematik hat gerade einige der bedeutendsten Mathematiker — genannt seien nur Brouwer, Hilbert und Weyl — bewogen, sich mit diesen Fragen auseinanderzusetzen, die sonst dem eigentlichen Mathematiker meist fernliegen, ja wegen ihrer Beziehung zur Philosophie mit ihrer dem mathematischen Denken widerstrebenden Unsicherheit und Vielfältigkeit der Meinungen vielfach etwas unsympathisch sind.

Es sind verschiedene Versuche gemacht worden, eine „Lösung" der Antinomien zu finden, d. h. klar aufzuzeigen, wo „der Trugschluß" steckt. Diese Versuche haben zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt, und es ist auch eine solche Lösung in Zukunft nicht mehr zu erwarten. Die Lage ist vielmehr so, daß von einem eindeutig zu bezeichnenden Denkfehler nicht die Rede sein kann. Man kann nur so viel mit Sicherheit sagen, daß das Zustandekommen der Antinomien mit dem Unendlichkeitsbegriff zusammenhängt. Denn in einer rein endlichen Mathematik können nach menschlichem Ermessen keine Widersprüche auftreten, sofern sie korrekt aufgebaut ist. Gewisse Analoga der Antinomien im Endlichen beruhen auf offenkundigen Ungenauigkeiten in den Begriffsbildungen.

Um einen Ausweg aus der durch die Antinomien entstandenen unangenehmen Lage zu finden, sind verschiedene Wege eingeschlagen worden. Das einfachste Verfahren ist zunächst dieses, eine Abgrenzung zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen in der Mathematik vorzunehmen, wobei die zu Antinomien führenden Schlüsse als unerlaubt herausfallen. Solcher Versuche gibt es eine ganze Reihe; teils wird die vorgeschlagene Abgrenzung durch irgendwelche Überlegungen als naturgemäß hingestellt, teils wird auch auf solche Begründungen ganz verzichtet. Beispiele sind die axiomatischen Mengenlehren und das System der „Principia Mathematica".

Dieses Verfahren ist auch praktisch ganz brauchbar, doch kann es grundsätzlich nicht befriedigen. Erstens nämlich ist die Abgrenzung ziemlich willkürlich, eine natürliche Folge des Umstandes, daß man eben „den Fehler" bei den Antinomien nicht genau bezeichnen kann. Zweitens liegt die Frage nahe, ob nicht eines Tages auch in dem eingezäunten Bereich der erlaubten Schlußweisen Widersprüche auftreten könnten. Gewiß kann man einige Erwägungen anführen, welche es wahrscheinlich machen, daß man die Antinomien endgültig ausgesperrt hat; aber besonders groß ist diese Sicherheit nicht. So scheint es mir nicht ganz ausgeschlossen, daß auch in der klassischen Analysis mögliche Widersprüche verborgen sein können. Daß man bis jetzt keine entdeckt hat, besagt nicht viel, wenn man bedenkt, daß der Mathematiker in praxi immer mit einem verhältnismäßig geringen Teil der an sich logisch möglichen mannigfachen Komplizierungen der Begriffsbildung auskommt.

Die folgerichtigste Art der Abgrenzung ist die durch den „intuitionistischen" Standpunkt, der in erster Linie von Brouwer und Weyl formuliert worden ist, gegebene. Dieser Standpunkt läßt sich wohl am einfachsten von folgender Grundthese aus verstehen: Der Begriff des Unendlichen in der Mathematik darf nicht so aufgefaßt werden, als ob unendliche Mengen von vornherein, an sich vorhanden sind und durch den Mathematiker gleichsam entdeckt werden — eine Auffassung, die ich kurz als „an-sich-Auffassung" des Unendlichen bezeichne —, sondern lediglich in dem Sinne, daß eine unendliche Gesamtheit konstruktiv vom Endlichen ausgehend schrittweise aufgebaut werden kann, wobei das Unendliche niemals als vollendet, sondern nur als ein Ausdruck für die Möglichkeit unbegrenzter Erweiterung des Endlichen anzusehen ist.

Dieser Grundsatz hat zweifellos manches für sich, und es hat auch schon vor der Zeit der Antinomien Bestrebungen ähnlicher Zielsetzung gegeben. Macht man sich ihn einmal zu eigen, so verschwinden die Antinomien, da bei diesen offenkundig von der an-sich-Auffassung unendlicher Mengen Gebrauch gemacht wird. Andererseits folgen aus diesem Grundsatz der konstruktiven Auffassung zwangsläufig die von den Intuitionisten aufgestellten Verbote gewisser in der heutigen Mathematik üblicher Schlußweisen [1]). Um ein Beispiel zu nehmen, betrachten wir den praktisch wichtigsten derartigen Fall, den der indirekten Existenzbeweise:

Nach klassischer Auffassung kann man die Existenz einer natürlichen Zahl z. B. mit einer Eigenschaft E indirekt dadurch beweisen, daß man annimmt, keine Zahl besäße die Eigenschaft E, und daraus irgendwie einen Widerspruch ableitet. Ein solcher Beweis ist von der konstruktiven Auffassung her abzulehnen. Man macht ja dabei eine Annahme über die unendliche Gesamtheit aller natürlichen Zahlen; das ist — von diesem Standpunkt aus — sinnlos, da diese als vollendete Gesamtheit niemals gegeben sein kann, sondern nur als eine unvollendete, immer weiter fortsetzbare Reihe betrachtet werden darf. — Trotzdem kann man auch von diesem Standpunkt aus durchaus die Existenz einer natürlichen Zahl mit einer Eigenschaft E beweisen, sofern man nämlich eine solche Zahl direkt angeben oder einen Weg zu ihrer Berechnung aufweisen kann. Dann geht ja der Begriff der Gesamtheit aller Zahlen gar nicht mehr in den Beweis ein.

Eine übersichtliche, bequem lesbare zusammenfassende Darstellung des intuitionistischen Standpunktes liegt neuerdings von Heyting vor [2]).

Ich glaube, man kann dem Intuitionismus zugeben, daß er wirklich die konsequentesten Folgerungen aus der durch die Antinomien bedingten Unannehmlichkeit gezogen hat. Aber

[1]) Ins einzelne gehende Ausführungen hierüber finden sich, für den Bereich der Zahlentheorie, im III. Abschnitt meiner in Anm. 3 zitierten Abhandlung. — Vgl. auch den § 3 der vorliegenden Arbeit.

[2]) A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung — Intuitionismus — Beweistheorie. Erg. Math. Grenzgeb. 3 (1935), Heft 4.

gegen einen radikalen Intuitionismus, der kategorisch alles in der Mathematik, was nicht der konstruktiven Auffassung entspricht, als sinnlos ablehnt, lassen sich doch schwerwiegende Einwände erheben. Ich werde in § 4 näher hierauf eingehen. An dieser Stelle sei nur das eine erwähnt: Wenn man diesen Standpunkt annimmt, bleibt von der ganzen klassischen Analysis nur ein Trümmerfeld zurück. Viele, und gerade einige grundlegende Sätze, werden ungültig, bzw. müssen anders gefaßt und auf andere Art bewiesen werden. Hinzu kommt noch, daß die Formulierungen meist umständlicher und die Beweise langwieriger werden. Existenzbeweise z. B., wie etwa der „Fundamentalsatz der Algebra", müssen jetzt so umgewandelt werden, daß für die Zahl, deren Existenz behauptet wird, ein Verfahren zu ihrer Berechnung angegeben wird, und es müssen Sonderfälle, in denen das nicht gelingt, ausgeschlossen werden.

Gewiß dürfte man auch vor dem größten Opfer nicht zurückschrecken, wenn es wirklich notwendig ist. Aber ist ein solches Opfer denn notwendig?

Damit komme ich zu der Auffassung Hilberts. Dieser stellte das Programm auf, die ganze klassische Mathematik, soweit möglich, aus ihrer bedenklich gewordenen Lage dadurch zu retten, daß man ihre Widerspruchsfreiheit auf exakt mathematischem Wege nachweist.

Die Durchführung dieses Programms steht leider zum großen Teil noch aus. Es hat sich erwiesen, daß die Schwierigkeiten solcher Widerspruchsfreiheitsbeweise größer sind, als man zunächst anzunehmen geneigt war (vgl. § 2. Satz von Gödel). Im Jahre 1936 ist von mir ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie erschienen [3]); ältere Teilergebnisse stammen von Ackermann, von Neumann und Herbrand; doch steht der praktisch vor allem wichtige Beweis für die Analysis noch aus.

Um einen Widerspruchsfreiheitsbeweis zu führen, braucht man natürlich bereits gewisse mathematische Beweismittel, deren Unbedenklichkeit man voraussetzen muß und auf diesem Wege schließlich nicht weiter begründen kann. Ein absoluter, d. h. voraussetzungsloser Widerspruchsfreiheitsbeweis ist selbstverständlich unmöglich. Es fragt sich nun, was für Beweismittel man als Grundlage in diesem Sinne wird ansehen können. Die Antwort ergibt sich aus dem zuvor Gesagten: Man wird solche Beweismittel verwenden dürfen, bei denen der Begriff des Unendlichen nur in konstruktivem Sinne angewandt wird, während man streng darauf achten muß, alles, was auf der an-sich-Auffassung des Unendlichen beruht und daher bedenklicher Natur ist, zu vermeiden. Diese Beschränkung bedeutet etwa das gleiche, was Hilbert als „finiten Standpunkt" bezeichnet hat. Es scheint allerdings, daß man für die Widerspruchsfreiheitsbeweise doch etwas weitergehende Hilfsmittel braucht, als wie Hilbert sie ursprünglich ins Auge gefaßt und unter dem Begriff der „finiten Beweismittel" verstanden hatte. Aber jedenfalls bleiben diese Hilfsmittel mit der konstruktiven Auffassung des Unendlichkeitsbegriffs im Einklang, und das ist das wesentliche, wodurch sie sich grundsätzlich von den bedenklichen Beweismitteln unterscheiden.

Ein Hauptmerkmal des Hilbertschen Standpunkts scheint mir das Bestreben zu sein, das mathematische Grundlagenproblem der Philosophie zu entziehen und es soweit wie irgend-

[3]) G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. 112 (1936), S. 493 bis 565. — Es sei bemerkt, daß im IV. Abschnitt dieser Abhandlung im Gegensatz zu den übrigen Teilen die Verständlichkeit der Zusammenhänge aus Raum- und Zeitmangel zu kurz gekommen ist gegenüber der Präzision der Beweisführung. Eine neue Fassung des Beweises mit ausführlicher Darlegung der Grundgedanken bildet den zweiten Teil des vorliegenden Heftes.

möglich mit den eigenen Hilfsmitteln der Mathematik zu behandeln. Ganz ohne außermathematische Voraussetzungen freilich kann man das Problem nicht lösen. Der Hilbertsche Plan beschränkt diese auf ein Mindestmaß: Den grundsätzlichen Unterschied zwischen der konstruktiven und der an-sich-Auffassung des Unendlichen muß man sich vergegenwärtigen und sich klarmachen, wieso dem Schließen gemäß der konstruktiven Auffassung ein wesentlich größeres Maß an Gewißheit zukommt, so daß man dieses als genügend sichere Grundlage wählen kann, um die Widerspruchsfreiheit der mit der an-sich-Auffassung des Unendlichen arbeitenden Teile der Mathematik darauf zurückzuführen.

Ich werde auch im folgenden auf alle philosophischen Streitfragen, deren Beantwortung auf die mathematische Praxis keinen Einfluß hat, und welche die Problemlage vielfach unnötig verworren und schwierig erscheinen lassen, nicht eingehen.

Kurz erwähnt sei noch der sog. „Logizismus", der gewöhnlich neben dem Intuitionismus und der Hilbertschen Auffassung als dritter wesentlicher Standpunkt zur Grundlegung der Mathematik genannt wird. Seine Thesen liegen in bestimmten philosophischen Anschauungen begründet, auf die ich gemäß dem eben Gesagten nicht eingehen will. Zu dem für die praktische Mathematik in erster Linie wichtigen Antinomien- und Unendlichkeitsproblem hat diese Richtung bisher im wesentlichen eine abwartende oder unentschiedene Stellung eingenommen und liefert zu dessen Entscheidung kaum einen Beitrag, da ihr Interesse in der Hauptsache anderen Fragen, z. B. der Begründung des Zahlbegriffs, gilt.

§ 2. Die exakte mathematische Grundlagenforschung: Axiomatik, Metalogik, Metamathematik. Sätze von Gödel und Skolem.

Im folgenden soll einiges gesagt werden über neuere Ergebnisse und insbesondere über ältere besonders wichtige Resultate der exakten mathematischen Grundlagenforschung, d. h. desjenigen Zweiges der Mathematik, der über die Grundlagen der Mathematik mathematische Untersuchungen anstellt. Gegenstand dieser Forschungen sind beispielsweise Axiomensysteme für mathematische Theorien — solche Untersuchungen sind ja seit altersher bekannt —, in neuerer Zeit aber auch besonders die logischen Schlußweisen und allgemein die Beweismethoden der Mathematik.

In den letzten Jahrzehnten hat sich eine große Reihe von Forschern aus allen Ländern mit diesen Fragen beschäftigt und eine Menge von Ergebnissen gewonnen. In Deutschland werden diese metalogischen und metamathematischen Forschungen zur Zeit wohl nur in Münster regelmäßig betrieben; im Ausland wären in erster Linie etwa Amerika und Polen als Hauptpflegestätten dieses Zweiges der Mathematik zu nennen.

Eine Hauptaufgabe der Metamathematik sind die zur Durchführung des Hilbertschen Programms erforderlichen Widerspruchsfreiheitsbeweise. Weitere große Probleme sind: das Entscheidungsproblem, d. h. das Problem, für eine vorgegebene Theorie ein Verfahren aufzufinden, das von jedem denkbaren Satz des betreffenden Gebietes zu entscheiden gestattet, ob er richtig oder falsch ist; ferner die Frage der Vollständigkeit, d. h. die Frage, ob ein bestimmtes System von Axiomen und Schlußweisen für eine bestimmte Theorie vollständig ist, also ob für jeden denkbaren Satz der Theorie mit Hilfe dieser Schlußweisen entweder seine Richtigkeit oder seine Unrichtigkeit bewiesen werden kann.

In enger Beziehung zu diesen Hauptproblemen stehen einige wichtige Sätze, die Gödel vor etwa 8 Jahren bewiesen hat [4]) und die viel Aufsehen gemacht und teilweise auch Mißdeutungen erfahren haben.

Da ist zunächst der Satz über Widerspruchsfreiheitsbeweise, welcher besagt, daß sich die Widerspruchsfreiheit einer mathematischen Theorie, welche die reine Zahlentheorie enthält und wirklich widerspruchsfrei ist, nicht mit den Beweismitteln dieser Theorie selbst beweisen läßt, insbesondere natürlich nicht mit einem Bruchteil dieser Beweismittel. Dieser Satz ist vielfach so ausgelegt worden, als ob damit das Hilbertsche Programm als undurchführbar erwiesen sei. Man nahm nämlich an — und es sprachen auch manche Gesichtspunkte dafür —, daß die für Widerspruchsfreiheitsbeweise zugelassenen „finiten" bzw. „konstruktiven" Schlußweisen nur einen Teil der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden und genau formulierbaren Schlußweisen darstellten. Dann wäre freilich nach dem Gödelschen Satz mit diesen Schlußweisen bereits die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie nicht nachweisbar. Ich bin jedoch der Meinung, daß es Schlußweisen gibt, die durchaus mit der konstruktiven Auffassung des Unendlichen im Einklang sind und andererseits doch nicht dem Rahmen der formalisierten Zahlentheorie angehören, ja welche vermutlich überhaupt über den Rahmen jeder formal abgegrenzten Theorie hinaus erstreckt werden können. Ich habe die betreffenden Schlüsse, soweit sie für den Widerspruchsfreiheitsbeweis der reinen Zahlentheorie erforderlich waren, in meiner Abhandlung angegeben [5]). Sie stehen im Zusammenhang mit der in der Mengenlehre vorkommenden „transfiniten Induktion", was aber nicht heißt, daß sie an den dieser anhaftenden Bedenklichkeiten teilhaben; sie werden vielmehr auf eine von der Mengenlehre gänzlich unabhängige Weise konstruktiv bewiesen. — Der Gödelsche Satz behält natürlich ganz unbeschadet von diesen Tatsachen eine große Bedeutung als ein sehr wertvolles Ergebnis, das insbesondere auch gerade für die Auffindung von Widerspruchsfreiheitsbeweisen große Dienste leistet, weil es einem sagt, mit welchen Mitteln man jedenfalls nicht zum Ziele kommen kann.

Ein anderer der Gödelschen Sätze betrifft das Entscheidungsproblem, und zwar für die sog. „Prädikatenlogik". Er besagt, daß gewisse Sätze dieses Systems mit bestimmten sehr weitgehenden mathematischen Hilfsmitteln nicht entschieden werden können. Dieser Satz ist in letzter Zeit von Church in der Weise wesentlich verschärft worden, daß dieser unter Zugrundelegung eines sehr allgemeinen Begriffs von „Verfahren" zeigen konnte, daß es überhaupt kein allgemeines Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik geben kann, daß somit das Entscheidungsproblem in diesem Falle überhaupt nicht allgemein lösbar sei [6]). Nun steht es damit so, daß, wenn das Entscheidungsproblem für die Prädikatenlogik gelöst wäre, beispielsweise die Gültigkeit oder Ungültigkeit des großen Fermatschen Satzes und ähnlicher zahlentheoretischer Probleme im Prinzip einfach ausgerechnet werden könnte,

[4]) K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Mh. Math. Physik 38 (1931), S. 173—198.

[5]) Siehe Anm. 3. Ich mußte mich in der Abhandlung kurz fassen und glaube, daß eine ausführlichere Darstellung dieses Punktes, als des Angelpunktes des ganzen Beweises, zu dessen deutlicherer Klarlegung von Nutzen wäre; ich hoffe, eine solche gelegentlich veröffentlichen zu können, wenn möglich gleich für den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Analysis einschließlich.

[6]) A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. 58 (1936), S. 345—363. Ders., A note on the Entscheidungsproblem. J. Symbolic Logic 1 (1936), S. 40—41. Ders., Correction to a note on the Entscheidungsproblem. J. Symbolic Logic 1 (1936), S. 101—102. — Vgl. auch: A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. Lond. Math. Soc. 2, 42 (1937), S. 230—265.

und man kann wohl sagen, daß es von vornherein nicht sehr wahrscheinlich ist, daß ein solches Entscheidungsverfahren gefunden werden könnte. Nichtsdestoweniger ist es natürlich sehr wertvoll, diese Vermutung durch einen ausdrücklichen Beweis bekräftigt zu sehen. Der Beweis von Church beruht freilich darauf, daß man den von ihm festgelegten Begriff des „Ausrechnungsverfahrens“ als den allgemeinsten möglichen annimmt. Wenn es jemand gelänge, noch eine andere Art von Ausrechnungsverfahren ausfindig zu machen, so wäre es denkbar, damit doch noch ein allgemeines Entscheidungsverfahren zu gewinnen. Man kann aber sagen, daß der von Church gegebene Begriff so allgemein gehalten ist, daß man sich eine nicht darunter fallende Art von Verfahren nicht recht vorstellen kann. Außerdem spricht zugunsten seiner Formulierung der Umstand, daß man von ganz verschiedenen Ausgangspunkten her immer zu diesem bzw. einem ihm gleichwertigen Begriff gelangt.

Ein drittes der Gödelschen Ergebnisse betrifft das Vollständigkeitsproblem. Es besagt, daß jede formal abgegrenzte widerspruchsfreie mathematische Theorie unvollständig ist in dem Sinne, daß man zahlentheoretische Sätze angeben kann, die richtig, aber mit den Mitteln dieser Theorie nicht beweisbar sind. Dies ist ein zweifellos sehr interessantes, aber jedenfalls nicht etwa beunruhigendes Ergebnis. Man kann es auch so ausdrücken, daß sich für die Zahlentheorie kein ein für allemal ausreichendes System von Schlußweisen angeben läßt, sondern daß vielmehr immer wieder Sätze gefunden werden können, deren Beweis wieder neuartige Schlußweisen erfordert. Daß die Dinge so liegen, mochte man vielleicht nicht von vornherein erwarten; aber jedenfalls ist es nicht unplausibel.

Der Satz offenbart natürlich eine gewisse Schwäche der axiomatischen Methode.

Da Widerspruchsfreiheitsbeweise im allgemeinen nur ein abgegrenztes System von Beweismitteln erfassen, so wird man auch diese erweitern müssen, wenn man eine Erweiterung der Beweismittel vornimmt.

Bemerkenswert ist, daß die gesamte bisherige Mathematik nur recht wenige, leicht aufzuzählende, immer wieder gleiche Schlußweisen verwendet, daß also das Bedürfnis nach Erweiterung zwar theoretisch vorhanden, praktisch aber nicht aktuell ist. Nun sind in der Tat die von Gödel angegebenen jeweils nicht beweisbaren zahlentheoretischen Sätze extra für diesen Zweck konstruiert und praktisch ohne Bedeutung; mit einer wesentlichen Ausnahme allerdings: das ist die Aussage der Widerspruchsfreiheit einer Theorie, die ja auch zu den innerhalb der Theorie nicht beweisbaren Sätzen gehört. Daher ist für deren Beweis allerdings die Anwendung neuartiger Schlußweisen erforderlich, die in diesem Falle überdies konstruktiver Natur sein sollen; darüber wurde ja zuvor schon berichtet.

Ich will nun einige Ergebnisse erwähnen, welche die Mengenlehre betreffen.

Man hat, in dem Bestreben, trotz des Unheils der Antinomien die Mengenlehre zu retten, gewisse einschränkende Bedingungen aufgestellt, durch welche die Widersprüche ausgeschlossen werden. Zu diesem Zweck wurden verschiedene Axiomensysteme der Mengenlehre entwickelt; am bekanntesten ist das System von Zermelo und Fraenkel. Für einen Teil dieses Systems, die sog. „allgemeine Mengenlehre“, wurde kürzlich von Ackermann ein Widerspruchsfreiheitsbeweis durchgeführt, oder vielmehr wurde die Widerspruchsfreiheit dieses Systems auf die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie zurückgeführt [7]). Die „allgemeine Mengenlehre“ entsteht, wenn man aus dem gesamten Axiomensystem das „Unendlichkeitsaxiom“ wegläßt, welches die Existenz unendlich vieler Gegenstände der Theorie fordert.

[7]) W. Ackermann, Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann. 114 (1937), S. 305—315.

Ackermanns Beweis beruht darauf, daß man für diesen Teil der Mengenlehre ein aus natürlichen Zahlen bestehendes Modell herstellen kann, ein Umstand, der übrigens schon länger bekannt war. Wenn man das Unendlichkeitsaxiom hinzunimmt, wird man eine gleiche Möglichkeit nicht mehr erwarten, da damit ja gerade die Existenz der überabzählbaren Mächtigkeiten in die Mengenlehre hineinkommt.

In diesem Zusammenhang ist jedoch ein Satz zu nennen, der auf den ersten Blick sehr merkwürdig erscheint und zu interessanten Folgerungen führt. Dieser wurde von Skolem vor etwa 15 Jahren zuerst formuliert und als „Satz von der Relativität der Mengenbegriffe“ bezeichnet [8]). Der Satz gehört übrigens im Gegensatz zu den zuvor erwähnten metamathematischen Sätzen nicht mehr dem Bereich der konstruktiven Auffassung an, sondern ist dem Bereich der an-sich-Auffassung zuzurechnen, schon allein darum, weil er von überabzählbaren Mächtigkeiten handelt. (Dieser Umstand tut seiner Bedeutung, die sich gerade auf die an-sich-Mathematik bezieht, keinerlei Abbruch.) Der Skolemsche Satz besagt: Wenn zu einem Axiomensystem von bestimmter Art überhaupt ein Modell, beliebig hoher Mächtigkeit, existiert, so existiert auch bereits ein abzählbares Modell, welches das Axiomensystem erfüllt. — Zu der betreffenden Art gehören alle bisher üblichen Axiomensysteme, bzw. sie lassen sich so umformen, daß sie von dieser Art sind; und es ist auch nicht ersichtlich, wie man ein Axiomensystem formulieren könnte, das nicht unter den von Skolem abgegrenzten Begriff fällt.

Wendet man diesen Satz auf irgendein Axiomensystem der Mengenlehre an, so ergibt sich, daß, wenn dieses überhaupt erfüllbar ist, was man natürlich annehmen will, es bereits durch ein abzählbares Modell erfüllt werden kann. Man kann wohl sagen, daß dieses Ergebnis für die axiomatische Mengenlehre nicht gerade angenehm ist. Es besagt ja, daß alle überabzählbaren Mächtigkeiten, von denen in der Mengenlehre die Rede ist, in einem bestimmten Sinne nur leerer Schein sind, indem man nämlich an die Stelle solcher Mengen ohne Änderung der Gültigkeit aller Sätze einfach gewisse abzählbare Mengen setzen kann.

Es entsteht zunächst der Anschein, als ob sich hieraus Widersprüche ergeben müßten. Man beweist doch in der axiomatischen Mengenlehre beispielsweise, daß die Menge aller reellen Zahlen nicht abzählbar sei. D. h. man beweist, genau gesagt, den Satz: Es gibt keine eineindeutige Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und den reellen Zahlen. Betrachten wir nun das nach Skolem existierende abzählbare Modell dieser Mengenlehre. Dieses Modell enthält Gegenstände, welche die natürlichen Zahlen des Axiomensystems vertreten, andere, welche die reellen Zahlen vertreten, und auch solche, welche die Zuordnungen, die auf Grund des Axiomensystems möglich sind, vertreten; und jede Sorte umfaßt höchstens abzählbar viele Gegenstände. Trotzdem bleibt der genannte Satz in diesem Modell gültig, indem es nämlich unter den im Modell vorhandenen Zuordnungen in der Tat keine gibt, welche die abzählbar vielen Vertreter der „natürlichen Zahlen“ den abzählbar vielen Vertretern der „reellen Zahlen“ eineindeutig zuordnet. Wohl gibt es an und für sich eine solche Zuordnung; aber diese ist eben unter den im Modell vorkommenden Zuordnungen nicht vertreten.

Vielleicht wird dieser nicht leichtverständliche Sachverhalt etwas deutlicher, wenn man ihm folgende Wendung gibt, wobei ich mich gleichfalls auf das Kontinuum der reellen Zahlen als Prototyp einer „überabzählbaren Mächtigkeit“ beschränken will: Man stelle sich auf den Standpunkt der an-sich-Auffassung, daß das Kontinuum an und für sich von vornherein ge-

[8]) Th. Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Verh. V. skand. Math.-Kongr. (1922), S. 217—232. Ders., Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, I., mat.-nat. Kl. (1929), No. 4.

geben sei, etwa als die Menge aller beliebigen unendlichen Dezimalbrüche. Dann kann man nach Cantor die Nichtabzählbarkeit dieses Systems beweisen. Nun aber läßt sich folgendes sagen: Jedes Axiomensystem der Analysis, das man aufstellen mag, ist in gewisser Weise für die vollständige Erfassung dieses gedachten Kontinuums unzureichend. Denn der Satz von Skolem ergibt, daß bei Zugrundelegung eines bestimmten Axiomensystems dieses Kontinuum durch ein abzählbares Modell ersetzt werden kann, welches alle in dem Axiomensystem festgelegten Eigenschaften des Kontinuums in gleicher Weise erfüllt. Bei dieser Auffassung würde also das Skolemsche Ergebnis sozusagen nicht einen Mangel des Kontinuums bzw. der höheren Mächtigkeiten, sondern einen Mangel des menschlichen Denkens in bezug auf die Erfassung dieser Mächtigkeiten aufzeigen.

Wie sich die abstrakte Mächtigkeits-Mengenlehre aus der Skylla der Antinomien und der Charybdis des Skolemschen Relativitäts-Satzes wird retten lassen, ja ob sie sich überhaupt wird retten lassen, das wird die Zukunft entscheiden müssen.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß andere Teile der Mengenlehre (Punktmengen, II. Zahlklasse) von diesen Schwierigkeiten nur in geringem Maße betroffen sind und jedenfalls immer eine gewisse Bedeutung behalten werden.

Vergleicht man den Skolemschen Satz mit dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz, so kann man sagen, daß beide gewisse Unvollkommenheiten formal abgegrenzter Axiomensysteme (worunter jetzt auch die zugelassenen Beweismittel mit einbegriffen sind) beleuchten. Der auf den ersten Blick vielleicht beim Gödelschen Satz besonders überraschende Umstand, daß auch bei Zugrundelegung der kompliziertesten Axiomensysteme der Analysis usw. immer wieder gerade zahlentheoretische Sätze unbeweisbar bleiben, erfährt durch den Skolemschen Satz eine gewisse Erklärung: Hiernach sind ja auch die kompliziertesten Axiomensysteme im Grunde auf ein abzählbares Modell, also auch auf natürliche Zahlen beziehbar; ihre Sätze lassen sich demnach sämtlich in zahlentheoretische Sätze umdeuten; alle diese Systeme sind also im Grunde nur Zahlentheorie.

Ein anderes Ergebnis von Skolem[9]) beleuchtet gleichfalls die Unvollkommenheit des axiomatischen Verfahrens gegenüber der Zahlentheorie; es lautet: Hat man irgendein Axiomensystem, von der obigen ganz allgemeinen Art, für die natürlichen Zahlen, so lassen sich diese durch ein der Zahlenreihe nicht isomorphes Modell ersetzen, welches gleichfalls das Axiomensystem erfüllt.

§ 3. Das Kontinuum.

In diesem und dem folgenden Paragraphen will ich nun noch etwas näher auf die Gegensätze zwischen der an-sich-Auffassung und der konstruktiven Auffassung in dem für die praktische Mathematik wichtigsten Bereich, der Analysis, eingehen. Und zwar soll in diesem Paragraphen der Unterschied beider Auffassungen bei der Bildung des Begriffs der reellen Zahl und der reellen Funktion erläutert werden, während in § 4 ein Weg zu einer Vereinigung der verschiedenen Standpunkte gezeigt werden soll.

[9]) Th. Skolem, Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norsk mat. forenings skr., Ser. II, Nr. 1—12 (1933), S. 73—82. Ders., Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen. Fund. Math. 23 (1934), S. 150—161.

Der Begriff der Irrationalzahl wird bekanntlich etwa auf folgende Weise gewonnen: Man teilt das Intervall von 0 bis 1 in zwei Teile, jeden Teil wieder in zwei Teile usw.; so gewinnt man fortlaufend immer feinere Unterteilungen. Eine Folge von solchen Intervallen, wobei jedes ein Teil des vorigen ist, zieht sich nun, je weiter man fortschreitet, mehr und mehr auf einen Punkt zusammen. Nun erfolgt im Rahmen der an-sich-Auffassung der Sprung in die vollendete Unendlichkeit: Man erklärt, eine unendlich lange derartige Folge sei eine „reelle Zahl".

Aus dieser Auffassung ergeben sich einige sonderbare Folgerungen, die man, abgesehen von der im Zusammenhang mit den Antinomien bestehenden Bedenklichkeit der an-sich-Auffassung überhaupt, als zusätzliche Argumente gegen sie anführen könnte: Einerseits läßt sich nämlich auf die übliche Art beweisen, daß diese reellen Zahlen eine überabzählbare Menge bilden. Andererseits sind alle Sätze, alle Definitionen, alle Beweise, die sich jemals aufstellen bzw. durchführen lassen, abzählbar, da sie ja stets mit endlich vielen Zeichen darstellbar sind. Damit gelangt man zu der Folgerung, daß es reelle Zahlen gibt, die überhaupt nicht einzeln definiert werden können, gültige Sätze, die kein Mensch jemals aussprechen und auch niemand beweisen kann. Nimmt man den Skolemschen Relativitätssatz hinzu, so folgt weiterhin, daß überhaupt die ganze bisherige Analysis in allen Teilen richtig bleibt, wenn man sie auf ein gewisses abzählbares Modell bezieht.

Es liegt doch wohl nahe, dann zu sagen: Wenn „das überabzählbare Kontinuum" in solcher Weise völlig unerfaßbar bleibt für unser Denken, hat es dann überhaupt einen Sinn, von ihm als etwas Wirklichem zu reden? In § 4 werde ich zeigen, wie man dennoch, in eingeschränktem Sinne, zu einer Bejahung dieser Frage gelangen kann.

Zunächst soll untersucht werden, was der konstruktivistische Standpunkt als Ersatz für den an-sich-Begriff der Irrationalzahl zu bieten vermag.

Die Folge von Intervallteilungen kann ebenso begonnen werden wie zuvor. Aber der Begriff der vollendeten unendlichen Folge von Intervallen muß als sinnlos abgelehnt werden. Das Unendliche soll ja nur als Möglichkeit, als ein Ausdruck für die Unbegrenztheit des Endlichen, angesehen werden. Man wird also sagen dürfen: Es ist möglich, die Unterteilung immer weiter und weiter zu treiben. Aber so gewinnt man keine Irrationalzahl, sondern lediglich in jedem Stadium der Unterteilung eine Anzahl von schließlich sehr eng liegenden rationalen Zahlen. In diesem Sinne sagte Kronecker, daß es „gar keine irrationalen Zahlen gebe" [10]). So engherzig braucht man aber auch als Konstruktivist nicht zu sein; es gibt Möglichkeiten, weiter zu kommen. Man kann nämlich eine Irrationalzahl als gegeben betrachten, wenn ein Gesetz vorliegt, welches gestattet, eine Folge von Intervallen der genannten Art beliebig weit zu berechnen. (Es empfiehlt sich dann, zur Vermeidung gewisser formaler Schwierigkeiten, doppelte Dualintervalle zugrunde zu legen, d. h. solche, die durch Zusammenfassen von zwei benachbarten Dualintervallen derselben Unterteilung entstehen.)

Ein solches Gesetz ist leicht anzugeben z. B. für $\sqrt{2}$, allgemein $\sqrt[n]{m}$, aber auch für Transzendente wie π und e, ja überhaupt für so ziemlich alle Zahlen, die man in der Analysis als einzeln definierte Zahlen benötigt; nämlich immer dann, wenn man die betreffende Zahl eben wirklich mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen kann.

[10]) Vgl. H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, deutsche Ausgabe, Anm. von F. Lindemann, S. 246 der I. und II. Aufl.

Nun muß man, um dem konstruktiven Standpunkt getreu zu bleiben, mit den so definierten „Zahlen" allerdings vorsichtig umgehen. Man darf sich nicht verleiten lassen, eine solche Zahl als einen fertigen unendlich langen Dualbruch anzusehen; gegeben ist eigentlich nicht die gesamte Zahl in diesem Sinne, sondern lediglich das Gesetz, das ihre schrittweise Präzisierung ermöglicht; dieses selbst ist etwas Endliches und lediglich dazu geeignet, die unendlich lange Zahl, von der man nach wie vor sagen kann, daß es sie eigentlich gar nicht gibt, in gewissen Zusammenhängen zu vertreten.

Eine Analysis auf dieser Art von Zahlbegriff aufzubauen, hat Weyl in seiner Schrift „Das Kontinuum" versucht[11]. (Er hat dort allerdings die konstruktive Grundeinstellung gegenüber der natürlichen Zahlenreihe noch nicht bis zur letzten Konsequenz durchgeführt, dies aber später nachgeholt[11].) Eine Schwierigkeit, die dabei auftritt, ist die Abgrenzung der zur Berechnung und damit zur Definition von Zahlen zugelassenen Hilfsmittel. Weyl nahm anfangs eine bestimmte Begrenzung vor; sonst wurde von intuitionistischer Seite auf eine solche überhaupt verzichtet, ein Standpunkt, der durchaus sachgemäß ist, da eine allgemeingültige Abgrenzung grundsätzliche Schwierigkeiten von analoger Art hat, wie sie nach dem oben Gesagten für abgegrenzte Axiomen- und Schlußweisensysteme bestehen, nämlich: immer wieder erweiterungsfähig und -bedürftig zu sein. Dies bedeutet keineswegs einen wesentlichen Mangel; in den praktisch zunächst wichtigen Fällen ist es ohne weiteres klar, wie der Begriff der „Berechenbarkeit" gemeint ist.

Eine gewisse Präzisierung stellt der schon in § 2 erwähnte Berechenbarkeitsbegriff von Church dar; unabhängig von diesem wurde ein gleichwertiger Begriff von Turing aufgestellt und insbesondere auch auf die Berechenbarkeit von reellen Zahlen angewandt[12]. Die betreffende Präzisierung besteht darin, daß ein alle „Berechnungsverfahren" umfassender Sammelbegriff angegeben wird; dadurch wird ein Unmöglichkeitsbeweis wie der in § 2 erwähnte ausführbar; jedoch gestattet sie nicht, von allem, was unter den Sammelbegriff fällt, zu entscheiden, ob es ein „Berechnungsverfahren" ist oder nicht.

Eine Erweiterung des konstruktivistischen Begriffs der reellen Zahl schuf Brouwer mit den „freien Wahlfolgen"[11]. Zu diesen gelangt man ganz folgerichtig, sobald man den Begriff der Funktion von reellen Zahlen einführen will. Die an-sich-Mathematik erklärt diesen bekanntlich einfach als eine Beziehung, durch welche jeder beliebigen reellen Zahl eine zweite reelle Zahl als Funktionswert zugeordnet ist. Darin steckt dreifach der Begriff einer vollendeten Unendlichkeit, in beiden reellen Zahlen nämlich und in der universellen, abstrakten „Zuordnung". Damit kann der Konstruktivist also nichts anfangen. Er könnte nun zunächst so vorgehen, daß er eine Funktion als ein Gesetz definiert, das jedem eine reelle Zahl definierenden Gesetz ein zweites eine reelle Zahl definierendes Gesetz zuordnet. Es läßt sich aber leicht einsehen, daß auch folgende weniger enge, dem Funktionsbegriff der an-sich-Auffassung näher kommende Fassung durchaus noch mit der konstruktiven Grundthese vereinbar ist:

Man geht nicht von dem Begriff der durch ein Gesetz gegebenen einzelnen reellen Zahl aus, sondern wieder von dem Intervallteilungsverfahren, indem man nämlich eine Funktion als ein Gesetz definiert, das folgendes leistet: Wenn man irgendwie eine Folge von Intervallen der oben beschriebenen Art auszuwählen beginnt, so wird einem gewissen endlichen Anfangsstück dieser Folge durch das Funktionsgesetz ein erstes Intervall des „Funktionswertes" zugeordnet, nach Fortsetzung der Folge bis zu einer gewissen weiteren Stelle ein zweites solches Intervall, usf. Die zugeordneten Intervalle sollen also wiederum eine „Intervallschachtelung" bilden. — Kurz gesagt: Es soll jeweils eine gewünschte endliche Anzahl von Anfangsstellen des Funktionswertes aus einer hinreichend großen Anzahl von Anfangsstellen des Argumentwertes nach dem Funktionsgesetz berechenbar sein.

[11]) Vgl. H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Z. 10 (1921), S. 39—79.
[12]) Vgl. Anm. 6.

Daß dieser Funktionsbegriff immer noch wesentlich enger ist als der an-sich-Begriff, erkennt man schon aus dem leicht ersichtlichen Umstand, daß eine solche „Funktion" stets eine stetige Funktion ist. Brouwer beweist überdies die gleichmäßige Stetigkeit dieser Funktionen, wobei er einen für einen Konstruktivisten ziemlich weitgehenden Gebrauch von der „transfiniten Induktion" macht[13].

Die Argumentwerte bei diesem Funktionsbegriff sind nun das, was Brouwer „freie Wahlfolgen" nennt, nämlich Folgen von Intervallen, bei denen man jeweils das nächstfolgende Intervall — innerhalb der durch die Grundbedingungen für Intervallschachtelungen gegebenen Beschränkungen — frei wählen kann.

Auch bei diesem Zahlbegriff kommt es darauf an, ihn mit Vorsicht zu gebrauchen; er hat eigentlich keinen selbständigen Sinn, sondern nur einen Sinn in passendem Zusammenhang. Denn die vollendete unendliche Folge ist ja nach wie vor ein sinnloser Begriff; die freie Wahlfolge darf also nur in solchem Zusammenhang gebraucht werden, wo nur von einem endlichen Anfangsstück derselben die Rede ist, oder allenfalls von der Möglichkeit beliebig weiter Fortsetzung. Das ist bei der angegebenen Funktionsdefinition der Fall.

Mit diesem Brouwerschen Funktionsbegriff kann man nun die in der Analysis meistgebrauchten Funktionen ohne Schwierigkeit auch konstruktivistisch definieren. Denn diese pflegen ja durchaus von der Art zu sein, daß man den Funktionswert bei fortlaufender Einschränkung des Argumentwertes wirklich immer genauer ausrechnen kann.

Beträchtliche Unterschiede der intuitionistischen Analysis gegenüber der klassischen an-sich-Analysis ergeben sich jedoch beim weiteren Ausbau der Theorie, insbesondere bei den Existenzsätzen, wie schon im ersten Paragraphen erwähnt wurde. Denn der Konstruktivist muß die Angabe eines Berechnungsgesetzes für die Zahl, deren Existenz behauptet wird, fordern; und das leisten die an-sich-Existenzbeweise häufig nicht.

Die intuitionistische Analysis wird dann viel komplizierter als die klassische. Man wird schon bei den vorgeführten Definitionen der Grundbegriffe etwas davon bemerkt haben. Der Konstruktivist braucht z. B. verschiedene Begriffe von reellen Zahlen für verschiedene Zwecke, während die an-sich-Auffassung mit einem einzigen, einfachen Begriff auskommt.

Freilich ist wegen der grundsätzlichen Bedenklichkeit der an-sich-Auffassung ein konstruktiver Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Analysis dringend erwünscht. Ich nehme an, daß dieser durch eine Weiterentwicklung der gleichen Hilfsmittel, die den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie ermöglicht haben, gelingen wird. Man könnte vielleicht meinen, daß durch das Überabzählbare, das Kontinuum, eine grundsätzlich neue Schwierigkeit auftritt. Doch läßt sich darauf z. B. entgegnen, daß ja nach dem Skolemschen Relativitätssatz jedes bestimmte formal abgegrenzte System der Analysis — und nur für solche fest umschriebenen Systeme braucht man die Widerspruchsfreiheit zu beweisen — bereits durch ein abzählbares Modell erfüllbar ist, so daß das Überabzählbare auch für die Frage der Widerspruchsfreiheit als nur scheinbar herausfällt.

[13]) L. E. J. Brouwer, Beweis, daß jede volle Funktion gleichmäßig stetig ist. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 27 (1924), S. 189—193 und S. 644—646.

§ 4. Möglichkeit der Vereinigung der verschiedenen Standpunkte.

Ich möchte nun die Meinung aussprechen, daß nach dem Gelingen des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die Analysis kein wesentliches Hindernis mehr dem entgegenstehen würde, daß sich die Vertreter der verschiedenen Richtungen — also die Konstruktivisten bzw. Intuitionisten einerseits und die Hilbert-Anhänger sowie die Vertreter einer reinen an-sich-Auffassung andrerseits — auf die Beibehaltung der klassischen Analysis in ihrer bisherigen Form einigen könnten. Augenblicklich zwar steht es so, daß die radikalen Konstruktivisten dieser Folgerung nicht zustimmen, und hier liegt der eigentliche, grundsätzliche Meinungsunterschied zwischen Brouwer und Hilbert. Die Intuitionisten erklären nämlich alle Sätze der auf der an-sich-Auffassung des Unendlichen beruhenden Mathematik für sinnlos, ihre Schlußweisen für ein leeres Spiel mit Zeichen ohne irgendeine Bedeutung.

In den vorangehenden Paragraphen habe ich verschiedene Umstände erwähnt, welche dieser Ansicht eine gewisse Stütze verleihen. Andrerseits steht ihr aber, um nur einen Gesichtspunkt von größtem Gewicht zu nennen, die gewaltige Fülle von erfolgreichen Anwendungen der klassischen Analysis in der Physik entgegen. Im folgenden will ich klarzulegen versuchen, wie man, selbst wenn man die konstruktivistische Grundthese anerkennt, doch auch zu einer Bejahung der Beibehaltung und Weiterführung der an-sich-Analysis gelangen kann.

Hilbert hat selbst den Weg hierzu gewiesen: nämlich die Methode der idealen Elemente[14]).

D. h.: Man betrachtet solche Aussagen, in denen vom Unendlichen im Sinne der an-sich-Auffassung die Rede ist, als „ideale Aussagen“, als Aussagen, die im Grunde gar nicht das bedeuten, was ihr Wortlaut besagt, die aber zur Abrundung einer Theorie, zur Erleichterung der Beweise und zur bequemeren Formulierung ihrer Ergebnisse von größtem Nutzen sein können. So führt man z. B. in der projektiven Geometrie die uneigentlichen Punkte ein und hat damit den Vorteil, daß sich viele Sätze vereinfachen, die sonst mit Ausnahmefällen belastet sind. Allerdings nimmt man dafür in Kauf, daß nun der Sinn eines Satzes in manchen Fällen nicht mehr der übliche ist. Man sagt beispielsweise: „Zwei Geraden haben immer einen Punkt gemeinsam.“ Sind die Geraden aber zufällig parallel, so haben sie eben in Wirklichkeit keinen Punkt gemeinsam. Das Verfahren ist unbedenklich, weil man genau festgesetzt hat, was man in solchen Ausnahmefällen unter dem Begriff „Punkt“, der jetzt einen weiteren Sinn hat, verstehen will.

Oder nehmen wir ein anderes Beispiel, das mir in der Beziehung zur Physik noch deutlichere Analogien zu dem Verhältnis von konstruktivistischer Mathematik und an-sich-Mathematik aufzuweisen scheint:

Ich denke an die gelegentlich angestellten Versuche, eine „natürliche Geometrie“ aufzubauen, d. h. eine Geometrie, die der physikalischen Erfahrung besser angepaßt ist als etwa die übliche (Euklidische) Geometrie[15]). In jener gilt z. B. der Satz „durch zwei voneinander verschiedene Punkte geht genau eine Gerade“ nur dann, wenn die Punkte nicht zu dicht beieinander liegen. Liegen sie nämlich sehr nahe zusammen, so kann man doch offenbar mehrere benachbarte Geraden durch beide Punkte ziehen. Der Zeichner muß auf solche Verhältnisse Rücksicht nehmen; die reine Geometrie jedoch tut das nicht, indem sie die Punkte idealisiert. Sie setzt an die Stelle des ausgedehnten Punktes der Erfahrung

[14]) Vgl. D. Hilbert, Über das Unendliche. Math. Ann. 95 (1926), S. 161—190.

[15]) Vgl. J. Hjelmslev, Die natürliche Geometrie. Hamb. math. Einzelschriften 1 (1923); auch: Abhandl. Math. Sem. Hamburg 2 (1923), S. 1—36.

den idealen ausdehnungslosen, in der Wirklichkeit nicht vorkommenden „Punkt“ der mathematischen Theorie. Und sie tut gut daran, wie der Erfolg zeigt: Es ergibt sich eine mathematische Theorie von einer viel einfacheren und besser abgerundeten Gestalt, als es jene natürliche Geometrie ist, die immerzu mit unangenehmen Ausnahmefällen zu tun hat.

Ganz entsprechend liegen nun die Verhältnisse bei der an-sich-Mathematik und der konstruktivistischen Mathematik: Die an-sich-Mathematik idealisiert beispielsweise den Begriff der „Existenz“, indem sie sagt: Eine Zahl existiert, wenn sich ihre Existenz beweisen läßt mit Hilfe eines Beweises, in dem das logische Schließen in derselben Weise, wie es für endliche Gesamtheiten gültig ist, auf vollendete unendliche Gesamtheiten angewandt wird; ganz als ob dies wirklich vorhandene Gebilde seien. Damit kommen diesem Existenzbegriff die Vorteile und die Nachteile eines idealen Elements zu: der Vorteil nämlich, daß eine beträchtliche Vereinfachung und Abrundung der Theorie erreicht wird — denn die intuitionistischen Existenzbeweise sind, wie erwähnt, meist sehr kompliziert und mit unangenehmen Ausnahmefällen behaftet —, der Nachteil dagegen, daß dieser ideale Existenzbegriff nicht mehr in gleichem Maße auf die physikalische Wirklichkeit anwendbar ist wie etwa der konstruktive Existenzbegriff.

Betrachten wir als Beispiel die Gleichung $a \cdot x = b$, in reellen Zahlen. Nach der an-sich-Auffassung heißt es einfach: Die Gleichung hat eine Wurzel, sofern a nicht gleich 0 ist. Der Intuitionist dagegen sagt: Die Gleichung hat eine Wurzel, wenn ich festgestellt habe, daß a von 0 verschieden ist. Es kann aber sein, daß aus der Art der Gegebenheit von a nicht ersehen werden kann, daß a gleich 0 ist, und auch nicht, daß a von 0 verschieden sei. In diesem Falle bleibt die Frage der Wurzelexistenz offen. — Man kann wohl zugeben, daß diese Auffassung der Lage des Physikers mehr entspricht, der den Koeffizienten a etwa aus einem Experiment zu bestimmen hat, das nicht genau genug ist, um einen Abstand zwischen a und 0 mit Sicherheit festzustellen.

Man könnte nun einwenden: Was nützen uns schön abgerundete Lehrgebäude, besonders einfache Sätze, wenn sie nicht ihrem wörtlichen Sinn gemäß auf die physikalische Wirklichkeit anwendbar sind? Sollte man dann nicht ein Verfahren vorziehen, das mühsamer ist und kompliziertere Ergebnisse zeitigt, das aber den Vorzug hat, daß diese Ergebnisse unmittelbare Wirklichkeitsbedeutung besitzen? Die Antwort gibt uns der Erfolg des ersteren Verfahrens; man denke nur wieder an das Beispiel der Geometrie. Die großen Leistungen der Mathematik für die Förderung der physikalischen Erkenntnis beruhen geradezu auf dieser Methode, das physikalisch Gegebene zu idealisieren und sich dadurch dessen Untersuchung zu vereinfachen. Freilich muß man dann bei der Anwendung der allgemeinen Ergebnisse auf die Wirklichkeit sich der durch die Idealisierung bedingten Unterschiede bewußt sein und eine entsprechende Übersetzung vornehmen. Die angewandte Mathematik hat hier ihr Tätigkeitsfeld.

Zum Vergleich zitiere ich Worte von Heyting und Weyl:

Der Intuitionist Heyting sagt an einer Stelle[16]):

„Vom formalistischen Standpunkt aus kann als Ziel der Physik die Beherrschung der Natur hervorgehoben werden. Wenn dieses Ziel mittels der formalen Methoden“ — d. h. der an-sich-Mathematik — „erreicht wird, ist kein Argument gegen sie stichhaltig“.

Weyl formuliert als seine Position in dem Streit zwischen Brouwer und Hilbert[17]):

„Nimmt man die Mathematik für sich allein, so beschränke man sich mit Brouwer auf die einsichtigen Wahrheiten, in die das Unendliche nur als ein offenes Feld von Möglich-

[16]) In der in Anm. 2 zitierten Schrift, S. 68. [17]) H. Weyl, Die Stufen des Unendlichen, Jena 1931, S. 17.

keiten eingeht; es ist kein Motiv erfindbar, das darüber hinausdrängt. In der Naturwissenschaft aber berühren wir eine Sphäre, die der schauenden Evidenz sowieso undurchdringlich ist; hier wird Erkenntnis notwendig zu symbolischer Gestaltung, und es ist darum, wenn die Mathematik durch die Physik in den Prozeß der theoretischen Weltkonstruktion mit hineingenommen wird, auch nicht mehr nötig, daß das Mathematische sich daraus als ein besonderer Bezirk des anschaulich Gewissen isolieren lasse: auf dieser höheren Warte, von der aus die ganze Wissenschaft als eine Einheit erscheint, gebe ich Hilbert recht."

Ich habe den Eindruck, daß gewisse intuitionistische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Existenz oder der Begriff der reellen Zahl, streng genommen auch schon „ideale Elemente" sind. Doch mag das strittig bleiben; es ist schwierig zu diskutieren und nicht so wichtig. Jedenfalls würde das nicht bedeuten, daß auch die Anwendung solcher Begriffe eines Widerspruchsfreiheitsbeweises bedürfte; man wendet sie ja nur so an, daß man sich ihres genauen konstruktiven Sinnes stets bewußt bleibt (vgl. § 3). Ebenso steht es in der projektiven Geometrie mit den „uneigentlichen Punkten"; anders jedoch ist es mit den idealen Begriffen der an-sich-Mathematik, welche — vom konstruktiven Standpunkt gesehen — gar keinen durch sie umschriebenen „sinnvollen" Inhalt haben, jedoch so angewandt werden, als ob sie einen ihrem Wortlaut entsprechenden Sinn besäßen.

Wenn nun einerseits die an-sich-Mathematik auch für den Konstruktivisten eine Rechtfertigung erhält, so sollte doch andrerseits in der Mathematik mehr als bisher auch dem konstruktiven Standpunkt ein Platz eingeräumt werden. In der Grundlagenforschung ist es bereits üblich, die Beweise möglichst auf konstruktivem Wege zu führen, nicht nur wegen der größeren Unbedenklichkeit — auf die man nicht immer angewiesen wäre —, sondern auch wegen des größeren sachlichen Gehalts der Ergebnisse. Denn es ist klar, daß ein konstruktiver Existenzbeweis mehr bedeutet als ein indirekter an-sich-Beweis. Vor allem in der reinen Zahlentheorie, überhaupt in allen Theorien, die nur mit endlich bezeichenbaren Gegenständen zu tun haben, ist es naturgemäß, den konstruktiven Standpunkt zugrunde zu legen [18]). Das hat man auch von jeher ganz von selbst getan; das ganz naive Schließen, bei dem man sich gar keine besonderen Gedanken über die Beweismethoden macht, ist von Natur zunächst konstruktiv, d. h. es scheut das „Unendliche". Überdies bringt in diesen Gebieten die Anwendung von transfiniten an-sich-Schlußweisen praktisch noch kaum einen Nutzen. Anders im Reiche des Kontinuums, in der Analysis und Geometrie: hier feiert die an-sich-Auffassung ihre Triumphe; hier ist ihr die konstruktive Auffassung praktisch unterlegen.

Abschließend läßt sich somit sagen: Die konstruktivistische („intuitionistische", „finite") Mathematik stellt durch ihre große Evidenz und die besondere Bedeutung ihrer Ergebnisse innerhalb der Gesamtmathematik einen wichtigen Bereich dar. Zu einer radikalen Ablehnung der auf der an-sich-Auffassung beruhenden Teile der Analysis liegen aber keine zwingenden Gründe vor; im Gegenteil kommt dieser eine große eigene Bedeutung, vor allem im Hinblick auf die physikalischen Anwendungen, zu.

Ob man schließlich das Kontinuum als eine bloße Fiktion, als ideales Gebilde, ansehen will, oder ob man doch im Sinne der an-sich-Auffassung darauf bestehen will, daß es eine Realität unabhängig von unseren Konstruktionsmitteln besitzt, das ist dann eine rein theoretische Frage, deren Entscheidung Geschmacksache bleiben mag; für die mathematische Praxis hat sie kaum mehr eine Bedeutung.

[18]) Vgl. auch das Vorwort zur 2. Aufl. des 1. Teils des Buches von van der Waerden: „Moderne Algebra".

Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.

Von Gerhard Gentzen in Göttingen.

Im folgenden gebe ich eine neue Fassung des im IV. Abschnitt einer früheren Arbeit [1]) enthaltenen Widerspruchsfreiheitsbeweises; und zwar soll diesmal der Hauptwert darauf gelegt werden, die Grundgedanken herauszuarbeiten und jeden einzelnen Beweisschritt möglichst verständlich zu machen. Zu diesem Zwecke werde ich stellenweise auf die ausführliche Darstellung aller Einzelheiten verzichten; da nämlich, wo diese für das Verständnis des Gesamtzusammenhangs unwichtig sind und der Leser sie sich andererseits mit nicht viel Mühe selbst ergänzen kann.

Der I. und III. Abschnitt der früheren Arbeit enthalten Überlegungen, deren Kenntnis für die Verfolgung des Widerspruchsfreiheitsbeweises nicht vorausgesetzt zu werden braucht, die allerdings für das Verständnis seines Zweckes unerläßlich sind. Im II. Abschnitt hatte ich in recht ausführlicher Darstellung eine Formalisierung der reinen Zahlentheorie, die sich eng an die mathematische Praxis anschließt, entwickelt. Auch auf diese lege ich nach wie vor großen Wert; man könnte wohl auch gleich ein fertiges formales System hinschreiben; doch scheint mir, daß damit ein wesentlicher Teil des Gesamtzusammenhanges unter den Tisch fällt. Hinzu kommt der Umstand, daß die unmittelbar der Praxis angeglichene formale Darstellung der Schlußweisen (§ 5 der früheren Arbeit), mit dem charakteristischen Begriff der „Sequenz", sich bereits als durchaus geeignet für metamathematische Untersuchungen erweist, ja, wie ich nach meinen Erfahrungen glaube, für die meisten Zwecke besser geeignet ist als die bisher im allgemeinen üblichen Darstellungsweisen.

Trotzdem ist es nicht gesagt, daß der „natürlichste" Schlußweisenkalkül einfach darum, weil er dem wirklichen Schließen am genauesten entspricht, auch für kalkültheoretische Untersuchungen am geeignetsten ist. Für den Widerspruchsfreiheitsbeweis insbesondere hat sich eine etwas andere Fassung als noch günstiger erwiesen, die ich daher im folgenden zugrunde legen will. Es ist dies diejenige formale Darstellung der logischen Schlußweisen, die ich bereits in meiner Dissertation [2]) als „Kalkül LK" entwickelt hatte. Ich setze jedoch die Kenntnis

[1]) G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. 112 (1936), S. 493 bis 565. Neudruck Darmstadt 1967 (Libelli, Bd. CLXXXV*).

[2]) G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Z. 39 (1935), S. 176—210 und 405—431. Neudruck Darmstadt 1969 (Libelli, Bd. CCLXXV*).

Auch in der in Anm. 1 zitierten Arbeit wurde im IV. Abschnitt ein gegenüber dem im II. Abschnitt entwickelten etwas veränderter Formalismus eingeführt. Dieser war speziell für den damaligen Beweis zugeschnitten und hat keine allgemeinere Bedeutung.

jener Arbeit nicht voraus. Auch aus dem II. Abschnitt der früheren Widerspruchsfreiheits-Arbeit werde ich nur einige Grundbegriffe übernehmen und darauf verweisen.

Der konstruktive Beweis des „Satzes der transfiniten Induktion" (bis ε_0), Nr. 15.4 der früheren Arbeit, bleibt als Abschluß des Widerspruchsfreiheitsbeweises ungeändert bestehen und erfährt vorläufig keine Neufassung; siehe die Schlußbemerkungen am Ende der vorliegenden Arbeit.

§ 1. Neue formale Darstellung der zahlentheoretischen Beweise.

Ich formuliere die einzelnen Begriffe und gebe jeweils anschließend einige Erläuterungen.

1.1. „Formel".

Die Definition des Begriffs Formel wird aus der früheren Arbeit (Nr. 3.2) übernommen, jedoch mit folgenden Vereinfachungen:

Als Zahlzeichen wird nur 1 verwendet. Funktionen werden nicht zugelassen (siehe aber die Schlußbemerkungen), mit Ausnahme einer einzigen, der Nachfolgerfunktion, die durch einen Strich bezeichnet wird: a' bedeutet inhaltlich dasselbe wie $a+1$. Unter Verwendung dieses Funktionszeichens lassen sich die natürlichen Zahlen nunmehr darstellen durch $1, 1', 1'', 1'''$ usw. Terme sind also jetzt stets von der Gestalt 1 oder $1'$ oder $1''$ usw. oder a oder a' oder a'' usw., wobei a für eine beliebige freie Variable steht. Erstere nennen wir Zahlterme, diese entsprechen also den früheren Zahlzeichen; letztere variable Terme. Prädikatzeichen werden wie früher nach Belieben zugelassen; es wird nur verlangt (Nr. 13.3 der früheren Arbeit), daß sie entscheidbar definiert sind, d. h. daß man für alle bestimmten natürlichen Zahlen entscheiden kann, ob das Prädikat auf sie zutrifft oder nicht. Unter Zugrundelegung dieses Term- und Prädikatbegriffs bleibt nun die alte Formeldefinition (Nr. 3.23) erhalten, doch soll auch noch das Verknüpfungszeichen $\supset$ ausgeschlossen werden. Das bedeutet keine wesentliche Beschränkung, da man bekanntlich $\supset$ durch & und $\neg$ oder $\vee$ und $\neg$ ersetzen kann. Man könnte ebenso auch noch $\vee$ und $\mathfrak{I}$, wie ich es damals getan habe (§ 12), eliminieren; doch können wir darauf verzichten, da diese Verknüpfungszeichen im „Kalkül LK" überhaupt keine Schwierigkeiten mehr verursachen, nämlich dem & und V restlos entsprechen.

Beispiel einer Formel:

$$Vx(x > 1' \,\&\, \mathfrak{I}y\,(y''' = a))$$

a sei eine freie Variable, x und y seien gebundene Variable.

Drei einfache Hilfsbegriffe werden wir im folgenden noch benötigen:

Als Primformel bezeichnen wir eine Formel, die kein Aussagenverknüpfungszeichen enthält.

Beispiel: $a''' = 1''$.

Als äußerstes Verknüpfungszeichen einer Formel, die keine Primformel ist, bezeichnen wir dasjenige Aussagenverknüpfungszeichen, das bei ihrem Aufbau (gemäß Nr. 3.23 der früheren Arbeit) als letztes hinzugefügt wird.

Als Grad einer Formel bezeichnen wir die Anzahl der in ihr vorkommenden Aussagenverknüpfungszeichen.

Beispiele: Eine Primformel hat den Grad 0. Die Formel $Vx(x > 1' \,\&\, \mathfrak{I}y\,(y''' = a))$ hat den Grad 3, und ihr äußerstes Verknüpfungszeichen ist das V.

1.2. „Sequenz".

Eine Sequenz ist ein Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

wobei für $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ beliebige Formeln stehen dürfen. Die $\mathfrak{A}$ heißen Vorderformeln, die $\mathfrak{B}$ Hinterformeln der Sequenz. Beide Systeme dürfen auch leer sein.

Eine Sequenz ohne freie Variable, bei der von jeder Vorder- und Hinterformel bekannt ist, daß sie „richtig" bzw. daß sie „falsch" sei, ist „falsch", wenn alle vorhandenen Vorderformeln richtig und alle Hinterformeln falsch sind. (Insbesondere auch dann, wenn weder Vorder- noch Hinterformeln vorhanden sind.) In jedem anderen Falle ist sie „richtig".

Erläuterungen. Wir werden von der Definition von „richtig" und „falsch" nur beim Begriff der „Grundsequenz" Gebrauch machen, wobei die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Primformeln ohne freie Variable, also unmittelbar entscheidbar sein werden. Im allgemeinen ist der Begriff der „Richtigkeit" einer Formel ja formal gar nicht definiert. Wohl aber kann uns die Definition ganz allgemein zur Erläuterung des inhaltlichen Sinnes einer Sequenz dienen, wobei wir noch hinzuzufügen haben, daß eine Sequenz mit freien Variablen dann und nur dann als richtig gilt, wenn bei jeder beliebigen Einsetzung von Zahlzeichen für die freien Variablen eine richtige Sequenz entsteht. Die inhaltliche Bedeutung einer Sequenz ohne freie Variable läßt sich kurz so ausdrücken: „Wenn die Annahmen „$\mathfrak{A}_1$", ..., „$\mathfrak{A}_\mu$" gelten, so gilt mindestens eine der Aussagen „$\mathfrak{B}_1$", ..., „$\mathfrak{B}_\nu$"."

In der früheren Arbeit hatte ich den Begriff der Sequenz, mit nur einer Hinterformel, in unmittelbarem Zusammenhang mit der natürlichen Darstellung der mathematischen Beweise eingeführt (§ 5). Man kann auch von solchen Gesichtspunkten her zu dem neuen, symmetrischen Sequenzbegriff gelangen, wenn man nämlich eine besonders natürliche Darstellung der Fallunterscheidungen anstrebt (s. § 4 der früheren Arbeit und besonders 5.26). Eine $\vee$-Beseitigung kann nämlich jetzt einfach so dargestellt werden: Von $\to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ schließt man auf $\to \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, zu lesen: „Es bestehen die beiden Möglichkeiten $\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{B}$." Doch muß man wohl sagen, daß im allgemeinen dieser neue Sequenzbegriff schon ein Abrücken vom „Natürlichen" bedeutet und seine Einführung in erster Linie durch die großen formalen Vorteile gerechtfertigt wird, welche die durch ihn ermöglichte gleich anzugebende Darstellung der Schlußweisen aufweist.

Es sei noch darauf hingewiesen, wie der inhaltliche Sinn einer Sequenz in Übereinstimmung mit der gegebenen Definition in den Fällen aufzufassen ist, wo die Sequenz keine Vorderformeln oder keine Hinterformeln besitzt: Sind keine Vorderformeln da, so besagt sie, daß irgendeine der Aussagen „$\mathfrak{B}_1$", ..., „$\mathfrak{B}_\nu$" gilt, nunmehr unabhängig von irgendwelchen Annahmen. Sind keine Hinterformeln da, so besagt die Sequenz, daß unter Voraussetzung der Annahmen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ keine Möglichkeit mehr offen bleibt, d. h.: Die Annahmen sind unverträglich, sie führen zum Widerspruch. Eine Sequenz ohne Vorder- und Hinterformeln, die „leere Sequenz", bedeutet also, daß ohne irgendwelche Annahmen ein Widerspruch sich ergibt, d. h.: Ist diese Sequenz in einem System ableitbar, so ist das System selbst widerspruchsvoll.

Beispiel einer Sequenz:

$$Vx(x' > 1) \to a > 1 \vee a = 1,\ \ 1' > 1,\ \ 1'' = b$$

a und b seien freie, x eine gebundene Variable.

1.3. „Schlußfigur."

Eine **Schlußfigur** (das formale Abbild eines Schlusses) besteht aus einem **Schlußstrich**, der unter diesem stehenden **Untersequenz** und den über ihm stehenden **Obersequenzen** (einer oder mehreren). Dabei bedeutet die Untersequenz das Ergebnis des Schlusses, das aus den durch die Obersequenzen dargestellten Prämissen gefolgert wird.

In unserem Formalismus sind nur solche Schlußfiguren zugelassen, die aus einem der nachfolgenden zwanzig **Schlußfigurenschemata** durch eine Einsetzung folgender Art hervorgehen:

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ dürfen beliebige Formeln eingesetzt werden; für $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ bzw. $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine beliebige Formel von dieser Gestalt, alsdann ist für $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ diejenige Formel zu setzen, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ entsteht, wenn man die gebundene Variable $\mathfrak{x}$ durch eine beliebige freie Variable $\mathfrak{a}$ bzw. einen beliebigen Term $\mathfrak{t}$ ersetzt. Für Γ, Δ, Θ und Λ dürfen beliebige, evtl. auch leere Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, eingesetzt werden.

Schließlich ist noch die folgende **Variablenbedingung** einzuhalten: Die mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Variable — wir nennen sie die **Eigenvariable** der betreffenden Schlußfigur — darf in der **Untersequenz** dieser Schlußfigur nicht vorkommen.

Die Schlußfiguren-Schemata.

1.3 1. Schemata für **Struktur-Schlußfiguren**:

Verdünnung: $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}}$

Zusammenziehung: $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}}$

Vertauschung: $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Delta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Delta}$

Schnitt: $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}$

Die beiden im letzten Schema mit $\mathfrak{D}$ bezeichneten Formeln heißen die **Schnittformeln**, ihr Grad der **Grad des Schnittes**.

1.3 2. Schemata für **Verknüpfungs-Schlußfiguren**:

$$\&\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta} \end{array}\right. \qquad \vee\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \end{array}\right.$$

$$\forall\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a})}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{t}), \Gamma \rightarrow \Theta}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \rightarrow \Theta} \end{array}\right. \qquad \exists\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \Gamma \rightarrow \Theta} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{t})}{\Gamma \rightarrow \Theta, \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})} \end{array}\right.$$

$$\neg\left\{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta}\right.$$

Diejenige Formel, die im Schema das **Aussagenverknüpfungszeichen** enthält, heiße die **Hauptformel** der betreffenden Verknüpfungsschlußfigur.

1.3 3. Schema für **VJ-Schlußfiguren** (die formalen Abbilder von vollständigen Induktionen):

$$\dfrac{\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}')}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{t})}$$

Der Grad der im Schema mit $\mathfrak{F}(1)$ bezeichneten Formel — welcher natürlich der gleiche ist wie der von $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}')$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ — heiße der **Grad der VJ-Schlußfigur**.

Beispiel einer Schlußfigur:

$$\dfrac{\rightarrow a' = 1', \quad 1 < 1'' \,\&\, a = 1''}{\rightarrow a' = 1', \quad \exists z (1 < z \,\&\, a = 1'')}$$

a sei eine freie, z eine gebundene Variable.

Erläuterungen zu den Schlußfigurenschemata folgen unten beim Herleitungsbegriff.

1.4. „Grundsequenz."

Wir unterscheiden „logische" und „mathematische" **Grundsequenzen**.

Eine **logische Grundsequenz** ist eine Sequenz von der Form $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, wobei für $\mathfrak{D}$ eine beliebige Formel stehen kann.

Eine **mathematische Grundsequenz** ist eine nur aus Primformeln bestehende Sequenz, die bei jeder beliebigen Einsetzung von Zahltermen für die etwa vorkommenden freien Variablen in eine „richtige" Sequenz übergeht.

Die „Richtigkeit" einer Primformel ohne freie Variable ist nach der Voraussetzung der Entscheidbarkeit aller Prädikate stets nachprüfbar. Ob eine Sequenz mit freien Variablen eine mathematische Grundsequenz ist oder nicht, ist natürlich nicht allgemein entscheidbar; das ist auch nicht erforderlich.

Beispiele von Grundsequenzen:

$$\forall x \exists y (x'' = a \,\&\, y > x) \rightarrow \forall x \exists y (x'' = a \,\&\, y > x)$$

$$a = b,\ b = c \rightarrow a = c \qquad a < 1 \rightarrow \qquad \rightarrow 1' > 1$$

$$a = b \rightarrow a = b \qquad \rightarrow a' > a \qquad \rightarrow 1''' \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 1'').$$

1.5. „Herleitung."

Eine **Herleitung** ist eine aus einer Anzahl von Sequenzen (mindestens einer) bestehende stammbaumförmige Figur mit einer untersten, der **Endsequenz**, und gewissen **obersten Sequenzen**, diese müssen Grundsequenzen sein; dazwischen wird der Zusammenhang durch Schlußfiguren hergestellt.

Wie das gemeint ist, ist wohl anschaulich klar; doch sei es noch einmal genauer ausgedrückt: Zunächst ist eine Endsequenz vorhanden. Diese ist entweder bereits eine oberste Sequenz — dann bildet sie allein schon die ganze Herleitung — oder sie ist die Untersequenz einer Schlußfigur. Jede Obersequenz dieser Schlußfigur ist wiederum entweder eine oberste Sequenz der Herleitung oder die Untersequenz einer weiteren Schlußfigur, usf.

Der Leser möge sich eine Herleitung immer ganz anschaulich als ein baumförmiges Gebilde vorstellen, dann werden die im § 3 an einer Herleitung anzustellenden Umformungen am ehesten deutlich werden.

Beispiel einer Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\rightarrow 1 = 1 \qquad \dfrac{a = a \rightarrow a' = a'}{1 = 1 \rightarrow b = b}\ \text{VJ-Schlußfigur}}{\rightarrow b = b}\ \text{Schnitt}}{\rightarrow \forall x (x = x)} \qquad \dfrac{1''' = 1''' \rightarrow 1''' = 1'''}{\forall x (x = x) \rightarrow 1''' = 1'''}\ \text{$\forall$-Verknüpfungsschlußfiguren}}{\rightarrow 1''' = 1'''}\ \text{Schnitt}$$

Ein weiteres Beispiel siehe unter 1.6.

Endseq. keine math. Grundseq.?

Noch ein später zu gebrauchender Hilfsbegriff:

Ein **Faden** einer Herleitung ist, kurz gesagt, die Reihe von Sequenzen, die man durchläuft, wenn man von einer bestimmten obersten Sequenz ausgehend bis zur Endsequenz hinabsteigt. Man geht dabei jeweils von einer Obersequenz einer Schlußfigur zu der Untersequenz dieser Schlußfigur weiter.

Es ist ferner ohne weiteres klar, was gemeint ist, wenn es heißt: Eine Sequenz steht **über** bzw. **unter** einer anderen demselben Faden angehörigen Sequenz in der Herleitung (d. h. nicht etwa nur unmittelbar darüber bzw. darunter, sondern in beliebigem Abstand). Allgemein soll, wo der Begriff „über" oder „unter" gebraucht wird, stets darin einbegriffen sein, daß die betreffenden Sequenzen einem gemeinsamen Faden angehören; sonst ist er sinnlos.

1.6. **Erläuterungen zu der neuen Formalisierung der zahlentheoretischen Beweise.**

Durch den neuen Herleitungsbegriff ist eine Formalisierung der zahlentheoretischen Beweise gegeben, die sich von meiner früheren, „natürlichen" Fassung vor allem in **zwei Punkten** unterscheidet. **Erstens**: Die den Aussagenverknüpfungszeichen zugehörigen Schlußregeln, die „Einführung" und „Beseitigung" eines Verknüpfungszeichens, sind jetzt durchweg so umgestaltet worden, daß stets die **Untersequenz** die „Hauptformel" enthält, während die Obersequenzen die zugehörigen Teilformeln enthalten. Der früheren „Einführung" eines Verknüpfungszeichens entspricht jetzt dessen Auftreten in einer **Hinterformel** der Untersequenz, der „Beseitigung" eines Verknüpfungszeichens entspricht sein Auftreten in einer **Vorderformel** der Untersequenz. Man überzeuge sich, etwa am Beispiel der V-Schlußregeln, daß die alte und die neue Fassung einander äquivalent sind (von dem Auftreten mehrerer Hinterformeln sehe man zunächst ab), wobei man den „Schnitt" und die logischen Grundsequenzen mit heranziehen muß. Vgl. die als Beispiel angegebene Herleitung mit der V-Einführung links und der anschließenden „V-Beseitigung".

Dieser Teil des Übergangs von den früheren zu den neuen Schlußregeln läuft darauf hinaus, daß man sich von der **natürlichen Reihenfolge der Aussagen** im zahlentheoretischen Beweis frei macht und an deren Stelle eine künstliche Anordnung derselben nach besonderen Gesichtspunkten durchführt, derart nämlich, daß bei den Verknüpfungsschlüssen jetzt immer die **einfachere** Aussage **zuerst** kommt und **danach** erst die kompliziertere, nämlich die Aussage mit der zusätzlichen Verknüpfung. Diese Umordnung erweist sich für den Widerspruchsfreiheitsbeweis aus dem Grunde als praktisch, weil bei diesem der Begriff der **Kompliziertheit** einer Herleitung und im Zusammenhang damit der Kompliziertheit einer einzelnen Formel, welche mit deren **Grad** zunimmt, eine wesentliche Rolle spielt.

Der **zweite** wichtige Unterschied gegenüber dem alten Herleitungsbegriff besteht in der Symmetrisierung des Sequenzbegriffs durch Zulassung beliebig vieler Hinterformeln. Es wird dadurch zwar etwas erschwert, den inhaltlichen Sinn der einzelnen Schlußschemata zu erfassen und sich ihre „Richtigkeit" plausibel zu machen. Man denke sich zu diesem Zwecke zunächst etwa nur **eine** Hinterformel vorhanden, und überlege sich nachher, daß der Schluß richtig bleibt, auch wenn mehrere Hinterformeln vorhanden sind, sowie auch, wenn gar keine Hinterformel da ist. Ist man erst einmal etwas vertraut mit diesem Herleitungsbegriff geworden, so wird man feststellen können, daß sich Herleitungsumformungen und andere

beweistheoretische Untersuchungen besonders einfach und elegant hiermit ausführen lassen. Die entscheidenden Vorteile sind diese:

Es besteht vollständige Symmetrie zwischen & und $\vee$, V und $\exists$. Alle Verknüpfungszeichen, &, $\vee$, V, $\exists$ und $\neg$ sind weitgehend gleichberechtigt in dem System; keines ist vor den anderen wesentlich ausgezeichnet. Vor allem ist die Sonderstellung der Negation, die in dem natürlichen Kalkül eine lästige Ausnahme darstellt (vgl. Nr. 4.5 6 und 5.2 6 der früheren Arbeit) auf eine fast wie Zauberei anmutende Weise vollständig behoben. Ich darf mich wohl so ausdrücken, da ich selbst, als ich den „Kalkül LK" erstmalig aufstellte, von dieser seiner Eigenschaft höchlichst überrascht worden bin. Der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" und die „Beseitigung der doppelten Verneinung" stecken in den neuen Schlußschemata drin — der Leser überzeuge sich davon, indem er beide aus dem neuen Kalkül ableite! —, aber sie sind völlig harmlos geworden und spielen bei dem folgenden Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht die geringste Sonderrolle mehr.

Denkt man sich die $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda$ aus den Schlußfiguren-Schemata entfernt, so sieht man, daß die Schemata von größter Einfachheit und Gleichartigkeit sind, indem jeweils nur noch das unbedingt Notwendige darin vorkommt; und die Γ, Δ, Θ, Λ sind ein mitgeführter Ballast, der nichts weiter bedeutet, als daß **zusätzliche** Vorder- und Hinterformeln unverändert von den Obersequenzen in die Untersequenz übernommen werden.

Die neue Formulierung des Begriffs der „**mathematischen** Grundsequenz" bedarf noch einer Erklärung. In der früheren Arbeit war dieser Begriff andersartig gefaßt worden (Nr. 5.2 3, und 10.1 4). Es erweist sich jedoch, daß derartige Grundsequenzen in dem neuen System **ableitbar** sind. Ein Beispiel, an dem man die allgemeinen Gesichtspunkte erkennen kann, mag dies verdeutlichen:

Die „mathematische Grundsequenz" im alten Sinne $\to V x\, V y \neg (x = y \,\&\, \neg\, y = x)$ läßt sich so herleiten:

$$\begin{array}{c}
a=b\to b=a \\ \hline
a=b\,\&\neg\, b=a\to b=a \\ \hline
\neg\, b=a,\ a=b\,\&\neg\, b=a\to \\ \hline
a=b\,\&\neg\, b=a,\ a=b\,\&\neg\, b=a\to \\ \hline
a=b\,\&\neg\, b=a\to \\ \hline
\to\neg(a=b\,\&\neg\, b=a) \\ \hline
\to V y\neg(a=y\,\&\neg\, y=a) \\ \hline
\to V x\, V y\neg(x=y\,\&\neg\, y=x)
\end{array}$$

Entsprechend kann man alle üblichen „mathematischen Grundsequenzen" im alten Sinne aus inhaltlich gleichbedeutenden mathematischen Grundsequenzen im neuen Sinne ableiten[3]). Daß überhaupt der neue Herleitungsbegriff mit dem der früheren Arbeit **äquivalent** ist — abgesehen von der Einschränkung, die sich aus der zunächst beschränkten Zulassung von **Funktionen** im neuen System ergibt — kann man, worauf ich nicht weiter eingehen will, nach den darüber gemachten Bemerkungen ohne besonders große Schwierigkeiten nachweisen[4]).

[3]) Nebenbei sei erwähnt, daß alle **logischen** Grundsequenzen gleichfalls im neuen System ableitbar sind, so daß ich solche eigentlich gar nicht mehr zuzulassen brauchte. Ihre Beibehaltung hat jedoch gewisse formale Vorzüge.

[4]) Der Äquivalenzbeweis ist zum großen Teil schon gegeben durch den im V. Abschnitt meiner Dissertation durchgeführten Äquivalenzbeweis für die Kalküle NK und LK.

§ 2. Überblick über den Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Es soll gezeigt werden, daß jede Herleitung *widerspruchsfrei* ist[5]); wofür wir einfach sagen können: daß keine Herleitung eine *leere Endsequenz* hat. Denn aus einem Widerspruch, $\rightarrow \mathfrak{A}$ und $\rightarrow \neg\, \mathfrak{A}$, kann man zunächst $\rightarrow \neg\, \mathfrak{A}$ und $\neg\, \mathfrak{A} \rightarrow$ und hieraus durch Schnitt die leere Sequenz ableiten. (Umgekehrt kann aus der leeren Sequenz durch „Verdünnungen" jede beliebige Sequenz abgeleitet werden.)

Es leuchtet ein, daß man zunächst die Widerspruchsfreiheit von *einfachen* Herleitungen beweisen wird, dann von *komplizierteren*, wobei man auf die Widerspruchsfreiheit der einfacheren zurückgreift, und so fort. Man geht also „induktiv" vor. Ferner ist es wohl nicht unplausibel, wenn bei diesem Vorgehen immer wieder bereits *unendliche* Reihen von Herleitungen erledigt werden müssen, ehe man zu einer komplizierteren Klasse fortschreiten kann; beispielsweise etwa zunächst sämtliche Herleitungen, die nur aus einer Sequenz bestehen, dann alle, die aus zwei Sequenzen bestehen, usw. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß man eine „*transfinite Induktion*" anwendet. Allerdings wird die Reihenfolge des Fortschreitens in Wirklichkeit wesentlich verwickelter als in dem als Beispiel genannten Falle.

Wir teilen den Beweisgang in drei Teile ein:

1. Die Widerspruchsfreiheit einer beliebigen Herleitung wird zurückgeführt auf die Widerspruchsfreiheit sämtlicher „einfacheren" Herleitungen. Das geschieht dadurch, daß für beliebige „Widerspruchsherleitungen", d. h. Herleitungen *mit der leeren Sequenz als Endsequenz* ein — eindeutiger — *Reduktionsschritt* definiert wird, welcher eine solche Herleitung in eine „einfachere" Herleitung mit der gleichen Endsequenz umwandelt. Die Definition dieses Reduktionsschrittes bildet den Inhalt des § 3.

2. Alsdann wird jeder Herleitung eine *transfinite Ordnungszahl zugeordnet* und nachgewiesen, daß bei einem Reduktionsschritt die betreffende Widerspruchsherleitung in eine Herleitung *mit kleinerer Ordnungszahl* übergeht. Damit erhält der zunächst nur gefühlsmäßig bestimmte Begriff der „Einfachheit" seinen genauen Sinn: Je größer die *Ordnungszahl* einer Herleitung ist, desto größer ist ihre „*Kompliziertheit*" im Sinne dieses Widerspruchsfreiheitsbeweises. Das ist der Inhalt des § 4.

3. Daraus folgt dann offenbar durch „transfinite Induktion" die Widerspruchsfreiheit aller Herleitungen. Der Schluß der transfiniten Induktion darf, als zunächst sehr „bedenklicher" Schluß, in dem Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht vorausgesetzt bzw. wie in der Mengenlehre bewiesen werden. Er bedarf vielmehr einer besonderen Begründung mittels unbedenklicher, „konstruktiver" Schlußweisen. Bezüglich dieser wird in den Schlußbemerkungen am Ende von § 4 vorläufig auf die frühere Arbeit verwiesen.

§ 3. Ein Reduktionsschritt an einer Widerspruchsherleitung.

3.1. Grundgedanken.

Es liege eine Herleitung vor, deren Endsequenz die leere Sequenz sei. Es soll eine Umformung derselben in eine in gewisser Weise *einfachere* Herleitung mit der gleichen Endsequenz angegeben werden. Was „einfacher" heißt, kann dabei vorläufig nur nach Plausibilitätserwägungen beurteilt werden und wird dann durch die Ordnungszahlen seine Präzisierung finden.

Was für Gesichtspunkte lassen nun überhaupt vermuten, daß, wenn ein Beweis für einen Widerspruch vorläge, ein solcher auch schon auf *einfacherem* Wege beweisbar sein müsse? Ein Widerspruch bedeutet eine Aussage von ganz einfacher Struktur, beispielsweise „$1 = 2$". Wenn man eine so *einfache* Aussage durch einen komplizierten Beweis beweisen kann, so liegt es nahe anzunehmen, daß man den Beweis wird *vereinfachen* können. Man kann etwa die folgende Überlegung anstellen: Es muß doch irgendwo in dem Beweis eine Aussage von *maximaler Kompliziertheit* auftreten. Alsdann ist aber anzunehmen, daß dieser „Kompliziertheits-Gipfelpunkt" (in der Formalisierung etwa eine Formel mit dem höchsten in der Herleitung vorkommenden *Grade*) sich irgendwie „reduzieren" lassen muß. Das Auftreten dieser Aussage ist im allgemeinen Falle nur in der Weise denkbar, daß sie durch den Schluß der „Einführung" ihrer äußersten Verknüpfung in den Beweis eingeführt und durch den Schluß der „Beseitigung" eben dieser Verknüpfung wieder weiterverwendet wird. Wenn man aber eine Verknüpfung erst einführt und dann wieder beseitigt, so kann man sie überhaupt weglassen, indem man unmittelbar von den vorangehenden Teilaussagen zu den nachfolgenden, entsprechenden Teilaussagen übergeht[6]).

Dies ist der Grundgedanke der nachher anzugebenden „Verknüpfungs-Reduktion". Freilich erweist es sich, daß die Dinge nicht ganz so einfach liegen, wie in dem eben skizzierten Gedankengang angenommen wurde. So kann einerseits das Vorkommen einer *vollständigen Induktion* in dem Beweis Schwierigkeiten machen; dann nämlich, wenn die betreffende Aussage mit höchster Verknüpfungszahl nicht unmittelbar durch einen „Einführungs"-schluß, sondern durch eine vollständige Induktion bewiesen wird. Diese erfordert vielmehr eine weitere, besondere Art von Reduktionsschritt, der als „*VJ*-Reduktion" bezeichnet werde. Die Form dieses Reduktionsschrittes ist höchst einfach und liegt ohne weiteres nahe: Wenn der Term t im Schema der *VJ*-Schlußfigur ein *Zahlterm* ist, also eine *bestimmte Zahl* darstellt, so kann man natürlich die vollständige Induktion durch eine Reihe von gewöhnlichen Schlüssen — in unserer Formalisierung eine Reihe von „Schnitten" — ersetzen. Darin besteht die „*VJ*-Reduktion".

Wenn in der Herleitung eine *VJ*-Schlußfigur vorkommt, deren t ein *variabler Term* ist — und dies ist eigentlich der normale Fall —, so läßt sich diese natürlich nicht *sofort* auf solche Art reduzieren. Das Reduktionsverfahren läßt sich aber so einrichten, daß bei Durchführung immer weiterer Reduktionsschritte allmählich mehr und mehr variable Terme durch Zahlterme ersetzt werden, so daß auch zunächst noch nicht reduzierbare *VJ*-Schlußfiguren schließlich einmal „an die Reihe kommen". Das sei nebenbei erwähnt. Hier handelt es sich ja für uns nur darum, einen *einzelnen Reduktionsschritt* zu definieren, also je nach dem Zustande der vorgelegten Widerspruchsherleitung wenigstens *eine Stelle* an ihr zu finden, wo eine Reduktion einsetzen kann.

Nehmen wir also an, es bestünde keine Gelegenheit zu einer *VJ*-Reduktion. Dann ist, wie unten bei der genauen Durchführung gezeigt wird, stets eine „Verknüpfungs-Reduktion" durchführbar. Allerdings kann man nicht erwarten, daß immer eine Formel vom höchsten überhaupt vorkommenden Grade angreifbar ist. Denn diese kann, wie gesagt, durch eine

[5]) In der früheren Arbeit habe ich allgemeiner „Reduzierbarkeit" der Endsequenz beliebiger Herleitungen bewiesen. Hier will ich mich auf Widerspruchsfreiheit beschränken; dadurch werden verschiedene Vereinfachungen möglich.

[6]) Genau derselbe Gedankengang liegt übrigens dem Beweis des „Hauptsatzes" meiner Dissertation zugrunde.

VJ-Schlußfigur eingeführt sein, und diese kann ein variables t haben. Wohl aber kann man in der Herleitung jedenfalls eine Formel auffinden, die einen „relativen Gipfelpunkt" darstellt, nämlich durch Einführung ihres äußersten Verknüpfungszeichens eingeführt und durch Beseitigung desselben weiterverwendet wird, und welche daher reduzierbar ist. Warum es immer eine solche Formel geben muß, das wird man am besten an Hand des unten folgenden Beweises (3.4 3) erkennen können.

Auf einen besonderen Umstand sei noch hingewiesen: Es kann beispielsweise vorkommen, daß die Formel, die zum Ansatzpunkt einer Verknüpfungsreduktion gemacht werden soll, in der Herleitung nicht nur einmal, sondern mehrmals weiterverwendet wird. (Ein Beispiel: Die Formel habe die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, und es wird daraus auf $\mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(1''')$, ja sogar vielleicht an anderer Stelle auf $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{A}$ geschlossen.) Man kann im allgemeinen Falle nicht mehr erreichen, als daß die Formel an einer Verwendungsstelle in Form einer Beseitigung ihres äußersten Verknüpfungszeichens verwendet wird. Über die übrigen Stellen läßt sich nichts aussagen. Daher kann man in diesem allgemeinen Falle die Formel nicht vollständig wegreduzieren, sondern lediglich für diese eine Verwendungsstelle eine Vereinfachung in der Weise durchführen, daß hierfür der Umweg über die Formel eingespart wird. Für die Verwendung an den übrigen Stellen muß sie jedoch bestehen bleiben. Es zeigt sich, daß dies genügt.

Diese Vorbetrachtungen wurden an Hand der Vorstellung des „natürlichen Beweises", mit der natürlichen Reihenfolge der einzelnen Aussagen, durchgeführt. Für die Anwendung auf unseren in § 1 festgesetzten Formalismus ist eine entsprechende Übersetzung vorzunehmen: Der „Einführung" eines Verknüpfungszeichens entspricht hier dessen Auftreten in einer Hinterformel der Untersequenz, der „Beseitigung" desselben sein Auftreten in einer Vorderformel der Untersequenz der Verknüpfungs-Schlußfigur. Alle weiteren Einzelheiten werden sich bei der nun folgenden genauen formalen Durchführung ergeben; die Vorbetrachtungen sollen und können natürlich nicht mehr leisten, als die Leitgedanken des Verfahrens in oberflächlicher Form dem Leser nahezubringen und dadurch das Verständnis der Durchführungen zu erleichtern.

3.2. Wegschaffung von überflüssigen freien Variablen als Vorbereitung des Reduktionsschrittes. — Das „Endstück".

Wir beginnen mit der Definition des „Reduktionsschrittes an einer Widerspruchsherleitung", indem wir festsetzen: Vor dem eigentlichen Reduktionsschritt wird die folgende einfache Umformung ausgeführt:

Alle freien Variablen in der Herleitung werden durch das Zahlzeichen 1 ersetzt; ausgenommen ist jedoch jede Eigenvariable (1.3) einer Schlußfigur in sämtlichen über der Untersequenz der betreffenden Schlußfigur stehenden Herleitungssequenzen.

Was bedeutet diese Vorbereitung? Nun, eine freie Variable dient normalerweise als Eigenvariable einer Schlußfigur und hat dabei nur oberhalb der Untersequenz dieser Schlußfigur etwas zu suchen; ihr Vorkommen in der Untersequenz selbst ist ja sogar durch die Variablenbedingung (1.3) verboten. Wo also sonst noch freie Variable auftreten, da sind sie völlig überflüssig und können ebensogut durch 1 ersetzt werden. Man überlegt sich leicht, daß dabei die Herleitung korrekt bleibt. Die leere Endsequenz bleibt natürlich unverändert.

Wir brauchen weiterhin einen einfachen Hilfsbegriff — das Endstück einer Herleitung —, der so definiert wird: Zum Endstück zählen alle diejenigen Herleitungssequenzen, die man durchläuft, wenn man jeden einzelnen Faden (1.5) von der Endsequenz her aufwärts verfolgt und haltmacht, sobald man auf den Schlußstrich einer Verknüpfungs-Schlußfigur trifft. Die Untersequenz dieser Schlußfigur gehört also jeweils noch zum Endstück, ihre Obersequenzen nicht mehr. Geht ein Faden überhaupt nicht durch den Schlußstrich irgendeiner Verknüpfungs-Schlußfigur, so wird er natürlich ganz zum Endstück gerechnet.

Das Endstück enthält an Schlußfiguren offenbar nur Struktur- und VJ-Schlußfiguren.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Das Endstück unserer Widerspruchsherleitung enthalte mindestens eine VJ-Schlußfigur. Dann wird eine VJ-Reduktion durchgeführt, siehe 3.3.

2. Das Endstück enthalte keine VJ-Schlußfigur. Dann wird, nach einem weiteren Vorbereitungsschritt (3.4), eine Verknüpfungs-Reduktion durchgeführt (3.5).

3.3. Die VJ-Reduktion.

Wenn nach Durchführung des angegebenen Vorbereitungsschrittes an der vorgelegten Widerspruchsherleitung in deren Endstück mindestens eine VJ-Schlußfigur vorkommt, so besteht der eigentliche Reduktionsschritt in der nachfolgend beschriebenen Umformung der Herleitung.

Man nehme sich eine VJ-Schlußfigur im Endstück vor, und zwar eine solche, die über keiner anderen VJ-Schlußfigur mehr steht. (D. h.: Der durch die Untersequenz der ausgewählten VJ-Schlußfigur gehende Herleitungsfaden soll von dieser Sequenz aus bis zur Endsequenz keinen Schlußstrich einer VJ-Schlußfigur passieren.) Damit der Reduktionsschritt eindeutig ist, ist noch irgendein Verfahren zur eindeutigen Bestimmung der auszuwählenden VJ-Schlußfigur anzugeben; das ist auf einfache Weise möglich.

Die VJ-Schlußfigur hat die Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{F}(a),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(a')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(n)}$$

wobei n einen Zahlterm bezeichnet. Denn ein variabler Term kann hier auf Grund der getroffenen Vorbereitungen unmöglich stehen, überhaupt kann die Untersequenz keine einzige freie Variable enthalten: Nach dem Vorbereitungsschritt kann es ja freie Variable nur noch oberhalb von Schlußfiguren mit einer Eigenvariablen geben, und solche kommen unterhalb unserer VJ-Schlußfigur nicht vor. Der von ihrer Untersequenz bis zur Endsequenz gehende Teilfaden geht vielmehr nur noch durch Schlußstriche von Struktur-Schlußfiguren hindurch.

Nun ersetzt man diese VJ-Schlußfigur durch ein System von Struktur-Schlußfiguren von folgender Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1') \qquad \mathfrak{F}(1'),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma \to \Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}\ \text{Schnitt}$$

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma \to \Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschungen u. Zusammenziehungen}$$

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1'') \qquad \mathfrak{F}(1''),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma \to \Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}\ \text{Schnitt}$$

$$\frac{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma,\ \Gamma \to \Theta,\ \Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1''')}\ \text{evtl. Vertauschungen u. Zusammenziehungen}$$

$$\vdots \qquad \text{usw. ganz entsprechend}$$

$$\frac{\qquad}{\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(n)}$$

Über den Sequenzen $\mathfrak{F}(1),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1')$ und $\mathfrak{F}(1'),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(1'')$ usw. schreibt man jeweils den zuvor über $\mathfrak{F}(a),\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(a')$ stehenden Herleitungsteil hin, wobei man die freie Variable a in dem ganzen Teil — ausgenommen, wenn sie zufällig gleichzeitig als Eigenvariable einer darin vorkommenden Schlußfigur verwendet sein sollte, in allen über der Untersequenz dieser Schlußfigur stehenden Sequenzen — durch den Zahlterm 1 bzw. 1′ bzw. 1″ usw. ersetzt. An die Sequenz $\mathfrak{F}(1), \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(n)$ nach unten anschließend schreibt man schließlich den übrigen Teil der alten Herleitung unverändert wieder hin. Genau gesagt: Alle Herleitungsfäden, die nicht durch diese Sequenz gingen, bleiben unverändert erhalten, und die, welche durch sie gingen, bleiben von der Endsequenz aufwärts bis hierher ungeändert.

Sollte n gleich 1 sein, so erfolgt die Reduktion etwas anders: Die Untersequenz der *VJ*-Schlußfigur lautet dann $\mathfrak{F}(1), \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(1)$. Man leitet sie aus der logischen Grundsequenz $\mathfrak{F}(1) \rightarrow \mathfrak{F}(1)$ durch Verdünnungen und Vertauschungen, soweit erforderlich, her. Was zuvor in der Herleitung über ihr gestanden hat, fällt weg; alles übrige bleibt wie in dem allgemeinen Falle unverändert erhalten.

Man macht sich leicht klar, daß bei dem *VJ*-Reduktionsschritt die gegebene Widerspruchsherleitung in eine in allen Teilen korrekte Widerspruchsherleitung übergehen würde. Man hat dazu im wesentlichen nur zu überlegen, daß die Ersetzung von a durch einen Zahlterm jede Schlußfigur wieder in eine korrekte Schlußfigur überführt.

Erläuterungen zu der Art des Reduktionsschrittes dürften nicht mehr erforderlich sein; seine inhaltliche Bedeutung ist, wie unter 3.1 angegeben, überaus einfach: Eine vollständige Induktion, die nur bis zu einer bestimmten Zahl reicht, wird durch eine der Größe dieser Zahl entsprechende Anzahl von gewöhnlichen Schlüssen ersetzt.

3.4. Vorbetrachtungen und Vorbereitungsschritt zur Verknüpfungs-Reduktion.

Jetzt haben wir den Fall zu behandeln, wo die Widerspruchsherleitung, nach Durchführung des Vorbereitungsschrittes 3.2, in ihrem Endstück keine *VJ*-Schlußfigur enthält.

Die in diesem Falle durchzuführende „Verknüpfungs-Reduktion" wird eingeleitet durch einen weiteren Vorbereitungsschritt (3.4 2), dessen Sinn es ist, alle im Endstück etwa vorkommenden Verdünnungen und logischen Grundsequenzen wegzuschaffen, die sonst zu lästigen Ausnahmefällen bei der eigentlichen Verknüpfungs-Reduktion Anlaß geben würden.

Zu diesem Zwecke und auch zu weiterem Gebrauch müssen wir uns zunächst die Struktur des Endstücks etwas im einzelnen verdeutlichen.

3.4 1. Das Endstück unserer Herleitung enthält nur Struktur-Schlußfiguren. Seine obersten Sequenzen sind oberste Sequenzen der Gesamtherleitung oder Untersequenzen von Verknüpfungs-Schlußfiguren. Das Endstück enthält keine freien Variablen (weil es keine Schlußfiguren mit Eigenvariablen enthält). Dies alles ist ohne weiteres ersichtlich.

Nun führen wir zwei einfache Hilfsbegriffe ein: $\Gamma\ \Lambda\ \Theta$

Gleiche, einander nach dem Schlußfigurenschema entsprechende Sequenzformeln in den Obersequenzen und der Untersequenz einer Struktur-Schlußfigur sollen verbunden heißen.

Miteinander verbunden sind z. B. die drei im Schema mit $\mathfrak{D}$ bezeichneten Formeln in einer Zusammenziehung, ebenso die erste der mit Γ bezeichneten Formeln in der Obersequenz mit der ersten der mit Γ bezeichneten Formeln in der Untersequenz, ebenso die zweite mit der zweiten usw.; die beiden Schnittformeln eines Schnittes sind miteinander verbunden; usw.

Die Gesamtheit aller Formeln im Endstück der Herleitung, welche man erhält, wenn man von einer einzelnen Formel ausgehend alle mit ihr verbundenen Formeln, dann alle mit diesen verbundenen Formeln usw. hinzunimmt, heiße ein Formelbund; wir können auch sagen: der zu der betreffenden Ausgangsformel gehörige Bund.

Über die Gestalt eines Bundes läßt sich folgendes sagen:

Jedem Bund ist ein Schnitt in der Weise zugehörig, daß dessen Schnittformeln zum Bunde gehören. Denn: eine irgendwo im Endstück vorkommende Formel ist, wie aus den Struktur-Schlußfigurenschemata ersichtlich, stets mit einer Formel in der nächsten darunterstehenden Sequenz verbunden, außer wenn sie eine Schnittformel ist. Da nun die Endsequenz leer ist, muß man bei der Verfolgung eines Bundes nach unten hin einmal zu einem solchen Schnitt gelangen.

Jetzt gehen wir von diesem Schnitt aus und verfolgen den Verlauf des Bundes im Anschluß an die beiden zum Bund gehörigen Schnittformeln nach aufwärts. Da ergibt sich: Der im Anschluß an die linke Schnittformel sich ergebende Teil des Bundes — wir nennen ihn die linke Seite des Bundes — ist stammbaumförmig; eine Verzweigung tritt ein, wenn man, von unten kommend, zu einer Zusammenziehung gelangt, deren $\mathfrak{D}$ zum Bund gehört; ein Zweig kann an einer Stelle aufhören, wenn man zu dem $\mathfrak{D}$ einer Verdünnung kommt oder zu einer obersten Sequenz des Endstücks; alsdann sprechen wir von einer obersten Formel des Bundes. Alle Formeln der linken Seite des Bundes sind Hinterformeln der betreffenden Sequenzen. Genau das Entsprechende gilt für die im Anschluß an die rechte Schnittformel erhaltene rechte Seite des Bundes; auch diese hat Stammbaumform usw., alle ihre Formeln sind Vorderformeln. Es ergibt sich ferner, daß keine weiteren Schnittformeln als die beiden, von denen wir ausgingen, zum Bund gehören; also ist der zum Bund gehörige Schnitt eindeutig bestimmt, und damit auch die Begriffe der linken und der rechten Seite des Bundes. Es gehören auch keine weiteren Formeln des Schnittes dem Bund an als allein die Schnittformeln. Alle zum Bund gehörigen Formeln stehen über der Untersequenz des Schnittes. (D. h.: Alle Sequenzen, welche Bundformeln enthalten, stehen über dieser.) Also bilden die linke und die rechte Seite zusammen den ganzen Bund.

Von der Richtigkeit aller dieser Behauptungen kann man sich leicht überzeugen, wenn man in Gedanken den Bund von den Schnittformeln aufwärts verfolgt und sich an Hand der Schemata der Struktur-Schlußfiguren klarmacht, auf welche Arten man allein zu immer weiteren verbundenen Formeln gelangen kann.

3.4 2. Nunmehr können wir uns dem Vorbereitungsschritt zur Verknüpfungs-Reduktion zuwenden, der, wie schon gesagt, die Wegschaffung aller im Endstück vorkommenden Verdünnungen und logischen Grundsequenzen leisten soll. Es leuchtet ein, daß dies möglich ist. Eine „Verdünnung" stellt ja nur eine Schwächung des inhaltlichen Sinnes einer Sequenz dar; wenn man aus der geschwächten Sequenz einen Widerspruch ableiten kann, wird man dasselbe wohl auch aus der stärkeren Obersequenz allein können; und auch eine logische Grundsequenz ist, als reine Tautologie, unter bloßen Strukturumformungen entbehrlich.

Das Verfahren ergibt sich fast von selbst. Beginnen wir mit den Verdünnungen: Man nimmt eine solche vor, über der — im Endstück — keine weitere mehr vorkommt. Man streicht nun einfach ihre Untersequenz und verwendet an deren Stelle die Obersequenz weiter. Damit die Herleitung korrekt bleibt, streicht man, nach unten fortschreitend, in der nächsten Untersequenz die mit der Verdünnungsformel D *verbundene* Formel, ebenso die mit dieser verbundene Formel in der nächstfolgenden Untersequenz, usw. Können sich dabei Schwierigkeiten ergeben? Nun, es kann etwa eine Zusammenziehung auftreten, worin ein D der Obersequenz zu streichen ist. Um so besser, dann wird die Obersequenz *gleich* der Untersequenz; die Zusammenziehung kann fortfallen und man ist fertig. Auch sonst können bei dem Verfahren gelegentlich Ober- und Untersequenz einer Schlußfigur *gleich* werden, dann läßt man natürlich einfach die Schlußfigur weg und schreibt die Sequenz nur einmal hin. Trifft man auf einen *Schnitt*, bei dem die zu streichende Formel eine *Schnittformel* ist, so streicht man dessen andere Obersequenz mit allem, was darübersteht, und leitet die Untersequenz aus der verbleibenden Obersequenz allein durch Verdünnungen und Vertauschungen (soweit erforderlich) her.

Die dabei neu auftretenden Verdünnungen werden nach demselben Verfahren ebenfalls wieder weggeschafft. Daß das Verfahren zum Abschluß führt, also zur völligen Befreiung des Endstücks von Verdünnungen, ergibt sich daraus, daß man innerhalb der Herleitung immer weiter nach *unten* gelangt (gemessen etwa an der Anzahl der Schnitte bis zur Endsequenz).

Es bleibe dem Leser überlassen, die Durchführbarkeit des angedeuteten Verfahrens ganz exakt nachzuweisen sowie es *eindeutig* zu gestalten; es liegen keine wesentlichen Schwierigkeiten vor.

Anschließend werden die *logischen Grundsequenzen* fortgeschafft: Eine solche kann nun im Endstück nur noch als Obersequenz eines Schnittes vorkommen, da keine Zusammenziehungen und Vertauschungen auf sie anwendbar sind; alsdann ist dessen Untersequenz, wie leicht ersichtlich, *gleich* der *anderen* Obersequenz. Man läßt also den Schnitt einfach weg und ist schon fertig.

Als Ergebnis erhalten wir schließlich eine Widerspruchsherleitung, deren Endstück die gleichen Eigenschaften besitzt wie oben angegeben, mit dem Zusatz, daß darin auch *keine Verdünnungen* und *keine logischen Grundsequenzen* (als oberste Herleitungssequenzen) mehr vorkommen.

3.4 3. *Weitere Vorbetrachtungen zur Verknüpfungs-Reduktion.*

Ich behaupte jetzt:

Es gibt im Endstück unserer Herleitung mindestens einen Formelbund, der sowohl auf seiner linken wie auch auf seiner rechten Seite jeweils mindestens eine oberste Formel hat, welche *die Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlußfigur* ist.

An dieser Stelle läßt sich der Zusammenhang unseres formalen Vorgehens mit den unter 3.1 skizzierten Grundgedanken erkennen: Der Begriff des *Formelbundes* gibt uns die Möglichkeit, das gesamte Vorkommen einer „Aussage" in dem „Beweis" (gleich: *Formel* in der *Herleitung*) zu überblicken. Eine *Hauptformel* als oberste Formel auf der *linken* Seite entspricht einer *Einführungsstelle* der äußersten Verknüpfung der betreffenden Aussage; eine Hauptformel auf der *rechten* Seite — die ja eine *Vorderformel* ist — entspricht einer Wiederbeseitigungsstelle derselben. Der zum Bund gehörige *Schnitt* bedeutet nichts weiter als die formelle Herstellung der Verbindung zwischen beiden Stellen, bedingt durch die besondere Struktur unseres Formalismus. Das Auftreten von *Verzweigungen* eines Bundes entspricht der am Ende von 3.1 besprochenen Schwierigkeit; Verzweigungen auf der rechten Seite bedeuten beispielsweise eine *mehrfache Verwendung* der Aussage. Daß Verzweigungen ebensowohl links wie rechts auftreten können, liegt an der allgemeinen Symmetrie

unseres Formalismus und erschwert eine Übertragung der Grundgedanken auf jede Einzelheit der Durchführung. Es genügt aber, wenn man nur ungefähr eine Vorstellung von dem Grundgedanken hat und sich weiterhin einfach von formalen Analogien leiten läßt; ebenso habe ich es bei der Aufstellung des Widerspruchsfreiheitsbeweises getan.

Jetzt ist die genannte Behauptung zu beweisen, die dem Sinne nach *die Existenz einer für eine Verknüpfungsreduktion geeigneten Stelle* in unserer Herleitung besagt.

Dazu ist zunächst festzustellen, daß unsere Herleitung mindestens eine Verknüpfungs-Schlußfigur enthalten muß. Wäre das nicht der Fall, so würde das Endstück die gesamte Herleitung umfassen. Das hieße: Aus mathematischen Grundsequenzen, die keine freien Variablen enthielten, die also „richtige" Sequenzen wären, wäre allein durch Anwendung von Struktur-Schlußfiguren, und ohne Verdünnungen, eine „falsche" Sequenz hergeleitet. Dabei kämen in der ganzen Herleitung nur Primformeln ohne freie Variable, also *entscheidbare* Formeln vor, so daß man von jeder Sequenz entscheiden könnte, ob sie richtig oder falsch ist. (Eine Formel mit Aussagenverknüpfungszeichen kann nicht vorkommen, weil in den Grundsequenzen keine vorkommt und durch keine der möglichen Schlußfiguren eine solche hineinkommen kann.) Das würde bedeuten, daß mindestens eine Schlußfigur vorkäme, deren Untersequenz „falsch" wäre, während ihre Obersequenzen „richtig" wären. Das ist, wie leicht feststellbar, unmöglich.

Zum Beweise der obigen Behauptung betrachten wir nun alle diejenigen Fäden des Endstücks, deren oberste Sequenz die Untersequenz einer Verknüpfungs-Schlußfigur ist. Diese durchlaufen wir von oben her und beachten dabei, ob in den durchlaufenen Sequenzen eine Formel vorkommt, die mit einer darüberstehenden *Hauptformel* dem gleichen Bund angehört (bzw. selbst eine Hauptformel ist). Dies trifft auf die obersten Sequenzen unserer Fäden zu; und bei der Durchlaufung nach unten hin vererbt sich diese Eigenschaft im allgemeinen Falle immer weiter. Sie bleibt bei der Durchlaufung von Zusammenziehungen und Vertauschungen trivialerweise (durch die Verbundenheiten) erhalten. Gelangt man zu einem Schnitt, in dem zwei Fäden der betrachteten Art zusammentreffen, so kann es allerdings eintreten, daß die Eigenschaft *nicht* auf die Untersequenz übertragen wird; doch offenbar höchstens dann, wenn gerade der zu den *Schnittformeln* gehörige Bund auf beiden Seiten je eine Hauptformel enthält. Das ist genau der in der *Behauptung* genannte Fall. Da nun jedenfalls die leere Endsequenz die genannte Eigenschaft *nicht* besitzt, so ist die Behauptung bewiesen, sofern dieser Fall wirklich der einzig mögliche ist, in dem beim Durchlaufen der betrachteten Fäden nach unten hin jene Eigenschaft unter Umständen *nicht* übertragen wird. Dazu haben wir nur noch einen Fall nachzutragen, nämlich daß man, von oben kommend, einen Schnitt durchläuft, dessen andere Obersequenz keinem der von uns betrachteten Fäden angehört, also nur solchen Fäden des Endstücks, die oben durch mathematische *Grundsequenzen* begrenzt sind. Alsdann kann diese Obersequenz nur *Primformeln* enthalten, also sind auch die Schnittformeln Primformeln; und eine in der durchlaufenen Obersequenz vorhandene mit einer Hauptformel zum gleichen Bund gehörige Formel kann, da ihr Grad größer als 0 ist, nicht Schnittformel sein, ist also mit einer Formel der gleichen Eigenschaft in der *Untersequenz* verbunden.

Damit ist der Beweis für die Existenz eines zur Verknüpfungs-Reduktion geeigneten Formelbundes abgeschlossen.

Nun noch ein letzter Hilfsbegriff, der von zentraler Bedeutung für die Definition des „Kompliziertheitsmaßes" einer Herleitung sein wird:

Als **Höhe einer Herleitungssequenz** bezeichnen wir den höchsten Grad irgendeines Schnittes oder einer VJ-Schlußfigur, dessen bzw. deren Untersequenz unter der betreffenden Sequenz steht. Gibt es keine solche Schlußfigur, so ist die Höhe gleich 0.

Über die Bedeutung dieses Begriffs folgen Erläuterungen weiter unten.

3.5. **Die Verknüpfungs-Reduktion.**

Jetzt kann die eigentliche Verknüpfungs-Reduktion definiert werden. Es liegt eine Widerspruchsherleitung vor, deren Endstück mindestens einen Formelbund enthält, dem auf jeder Seite mindestens eine Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlußfigur angehört. Wir wählen *einen* solchen Formelbund und *je eine* derartige oberste Formel desselben aus. Damit der Schritt eindeutig ist, sind wieder irgendwelche Festsetzungen über die Art der Auswahl zu treffen; das ist nicht schwierig.

Wir wollen nun zunächst den Fall behandeln, daß das äußerste Verknüpfungszeichen der Bundformeln ein $\forall$ ist. Die übrigen Fälle werden fast ebenso behandelt und lassen sich nachher durch wenige Bemerkungen erledigen.

Die Herleitung sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c}
\vdots\,(a) \\
\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\mathfrak{F}(n), \Gamma_2 \to \Theta_2}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma_2 \to \Theta_2}
\end{array}$$

Die beiden Verknüpfungs-Schlußfiguren

Höhe ϱ

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \forall x\, \mathfrak{F}(x) \qquad \forall x\, \mathfrak{F}(x), \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

Der zum Bund gehörige Schnitt

$$\vdots$$

Höhe ϱ

Höhe $\sigma < \varrho$

$$\dfrac{}{\Gamma_3 \to \Theta_3}$$

„Höhenlinie"

$$\vdots$$

$$\dfrac{}{\to}$$

Die leere Endsequenz

Erklärungen: Die Punkte sollen andeuten, daß in beliebiger Weise weitere Fäden von beiden Seiten in den hervorgehobenen Faden einmünden können. Über den beiden Verknüpfungs-Schlußfiguren können gleichfalls ganze Herleitungsteile von irgendwelcher Gestalt stehen. Der Term n kann nur ein **Zahlterm** sein, da ja darunter keine Schlußfigur mit einer Eigenvariablen vorkommen kann (3.2, 3.4 1). $\Gamma_3 \to \Theta_3$ sei die erste Sequenz, auf die man bei Durchlaufung des Fadens von $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ zur Endsequenz hin trifft, welche eine **geringere Höhe** hat als die Obersequenzen des zum Bund gehörigen Schnittes. (Eine solche Sequenz muß es stets geben, da die Höhe der Endsequenz gleich 0 ist, die der Obersequenzen jenes Schnittes jedoch mindestens 1, weil schon der Grad des Schnittes selbst mindestens gleich 1 ist.) Dies kann unter Umständen bereits die Sequenz $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ selbst sein; dann ist die Skizze entsprechend aufzufassen. Ebenso kann unter Umständen natürlich eine Obersequenz des Schnittes bereits selbst die Untersequenz der Verknüpfungs-Schlußfigur sein; und schließlich kann auch die Sequenz $\Gamma_3 \to \Theta_3$ mit der Endsequenz identisch sein; das macht alles keinen Unterschied für die Reduktion.

Der **Reduktionsschritt** besteht nun in der Umwandlung der Herleitung in die durch die folgende Skizze angedeutete Gestalt:

Vertauschungen u. Verdünnung

$$\begin{array}{c}
\vdots\,(n) \\
\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(n)}{\Gamma_1 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\mathfrak{F}(n), \Gamma_2 \to \Theta_2}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma_2 \to \Theta_2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\vdots\,(a) \\
\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\mathfrak{F}(n), \Gamma_2 \to \Theta_2}{\forall x\, \mathfrak{F}(x), \Gamma_2, \mathfrak{F}(n) \to \Theta_2}
\end{array}$$

Vertauschungen u. Verdünnung

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{F}(n), \Theta, \forall x\, \mathfrak{F}(x) \qquad \forall x\, \mathfrak{F}(x), \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(n), \Theta, \Lambda}
\qquad
\dfrac{\Gamma \to \Theta, \forall x\, \mathfrak{F}(x) \qquad \forall x\, \mathfrak{F}(x), \Delta, \mathfrak{F}(n) \to \Lambda}{\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(n) \to \Theta, \Lambda}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_3}}{\Gamma_3 \to \Theta_3, \mathfrak{F}(n)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3, \mathfrak{F}(n) \to \Theta_3}}{\mathfrak{F}(n), \Gamma_3 \to \Theta_3}}{\dfrac{\Gamma_3, \Gamma_3 \to \Theta_3, \Theta_3}{\Gamma_3 \to \Theta_3}}$$

Vertauschungen, soweit nötig

Neuer Schnitt

Zusammenziehungen u. Vertauschungen, soweit nötig

$$\vdots$$

$$\dfrac{}{\to}$$

Die Endsequenz

Wie die Skizze gemeint ist, dürfte wohl in der Hauptsache ersichtlich sein. Die alte Herleitung für $\Gamma_3 \to \Theta_3$ wird zweimal nebeneinander hingeschrieben und das erstemal in der Weise geändert, daß die **linke Verknüpfungs-Schlußfigur fortfällt**; dabei wird in dem darüberstehenden Herleitungsteil die freie Variable a überall durch den Zahlterm n ersetzt — ausgenommen wieder, wenn sie zufällig gleichzeitig als Eigenvariable einer darin vorkommenden Schlußfigur verwendet sein sollte, in den über der Untersequenz dieser Schlußfigur stehenden Sequenzen —; ferner wird dann die Formel $\forall x\, \mathfrak{F}(x)$ trotzdem wieder eingeführt, jedoch jetzt durch eine **Verdünnung**; und alles übrige wird genau wie zuvor belassen mit der einzigen Änderung, daß die Formel $\mathfrak{F}(n)$ in dem durch $\Gamma_1 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_1, \forall x\, \mathfrak{F}(x)$ gehenden Faden als zusätzliche Hinterformel mitgenommen wird. Man sieht an Hand der Schlußfigurenschemata ohne weiteres ein, daß hierbei alle Schlußfiguren in Ordnung bleiben; ebenso auch bei der Ersetzung von a durch n. Beim **zweiten** Hinschreiben der alten Herleitung von $\Gamma_3 \to \Theta_3$ hat man entsprechend zu verfahren. Jetzt fällt die **rechte** Verknüpfungs-Schlußfigur weg, wobei die Ersetzung einer Variablen nicht nötig ist; und es wird die Formel $\mathfrak{F}(n)$ als zusätzliche **Vorderformel** nach unten mitgenommen.

Aus den beiden so hergeleiteten Sequenzen $\Gamma_3 \to \mathfrak{F}(n), \Theta_3$ und $\Gamma_3, \mathfrak{F}(n) \to \Theta_3$ gewinnt man dann, mit Zuhilfenahme von Vertauschungen und Zusammenziehungen, durch einen **neuen Schnitt** wieder die alte Sequenz $\Gamma_3 \to \Theta_3$, und der Rest der alten Herleitung wird unverändert übernommen.

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß der hiermit definierte Reduktionsschritt die vorgelegte Herleitung wieder in eine in allen Teilen korrekte Herleitung im Sinne unseres Formalismus überführt.

Erläuterungen zu der Bedeutung dieses Reduktionsschrittes.

Erinnern wir uns an die Grundgedanken der Verknüpfungs-Reduktion (3.1) und vergleichen wir damit die jetzt erfolgte formale Durchführung! Die beiden Verknüpfungs-Schlußfiguren stellen Einführung und Beseitigung des V in $V x\, \mathfrak{F}(x)$ dar. Dem ursprünglichen Grundgedanken gemäß wären beide wegzulassen und das $V x\, \mathfrak{F}(x)$ durch das „einfachere" $\mathfrak{F}(n)$ — dessen Grad um 1 niedriger ist — zu ersetzen; an die Stelle des Schnittes mit den Schnittformeln $V x\, \mathfrak{F}(x)$ hätte ein neuer Schnitt mit den Schnittformeln $\mathfrak{F}(n)$ zu treten. Nun besteht jedoch die schon erwähnte Schwierigkeit, daß die Formel $V x\, \mathfrak{F}(x)$ noch mehr Verwendungs-, ja sogar auch mehrere Einführungsstellen haben kann — d. h. der Formelbund kann *beiderseits verzweigt* sein und mehrere oberste Formeln haben. Daher ist es notwendig, sowohl im Zusammenhang mit der Streichung der *linken* Verknüpfungs-Schlußfigur, als auch ebenso bei der *rechten*, dennoch auch den alten Schnitt mit $V x\, \mathfrak{F}(x)$ beizubehalten, wobei freilich *jeweils* eine „*Vereinfachung*" dadurch erreicht wird, daß nun eine Verknüpfungs-Schlußfigur über diesem Schnitt *fortgefallen* ist. (An deren Stelle treten zwar Vertauschungen und Verdünnung, doch diese „zählen nicht" bei der Feststellung der „Kompliziertheit" der Herleitung. — Daß $V x\, \mathfrak{F}(x)$ durch Verdünnung wieder eingeführt wird, geschieht nur aus Bequemlichkeitsgründen, da ohnehin mit dessen Auftreten weiter unten gerechnet werden muß und die neue Gestalt der Herleitung so am bequemsten aus der alten zu übernehmen ist.)

Weiter unten in der neuen Herleitung folgt dann der „neue Schnitt" mit den Schnittformeln $\mathfrak{F}(n)$. Warum ist dieser nun gerade unter die „Höhenlinie" gelegt worden? (An und für sich könnte man ihn an jede beliebige Stelle unterhalb der beiden $V x\, \mathfrak{F}(x)$-Schnitte, bis ganz ans Ende der Herleitung, legen; man hätte nur ebenfalls den Teil von diesen Schnitten bis zum neuen Schnitt zweimal hinzuschreiben und mit $\mathfrak{F}(n)$ als zusätzlicher Hinter- bzw. Vorderformel zu versehen, während der Teil unter dem neuen Schnitt ungeändert bliebe.)

Damit kommen wir zu dem Zweck des *Höhenbegriffs* überhaupt. Worauf es ankommt, ist doch, daß bei der Reduktion eine „*Vereinfachung*" der Herleitung, in einem im nächsten Paragraphen durch die Ordnungszahlen zu *präzisierenden* Sinne, erreicht wird. Auf den ersten Blick sieht aber die neue Herleitungsform *komplizierter* aus als die alte: ein und derselbe Herleitungsteil tritt jetzt *zweimal* auf, allerdings *jeweils* gegen zuvor etwas *vereinfacht* durch das Fortfallen einer Verknüpfungs-Schlußfigur. Bei der Aufstellung eines Kompliziertheitsmaßes für Herleitungen wird man also leicht erreichen können, daß *jeder einzelne* der beiden über dem neuen Schnitt stehenden Teile etwas niedriger zu bewerten ist als der entsprechende Teil der alten Herleitung. Nun kommt aber der neue Schnitt hinzu, und wie soll man erreichen, daß der *gesamte* Herleitungsteil bis $\Gamma_3 \to \Theta_3$ niedriger bewertet wird als die alte Herleitung bis zu der gleichen Sequenz? Der neue Schnitt hat einen *niedrigeren* Grad als der alte; an diesen Umstand müssen wir uns klammern. Und *darum* wird der neue Schnitt *unter* den Bereich *aller* Schnitte von gleichem Grad wie der alte Schnitt gelegt, damit alle diese *hochgradigen* Schnitte nach der Reduktion keinen *größeren* Bereich als zuvor über sich haben, sondern entweder denselben oder einen „vereinfachten" Bereich. Der neue Schnitt freilich und alles, was unter ihm steht, erstreckt sich jetzt über einen größeren Bereich als zuvor. Das wird aber dadurch wettgemacht, daß alle diese Schnitte *von geringerem* Grad als der alte Schnitt sind. Es kommt nur nachher bei der Zuweisung von Ordnungszahlen darauf an, diesen Sachverhalt richtig auszuwerten, um zu einer Verkleinerung

der Ordnungszahl der Herleitung, bei der Reduktion, zu gelangen. Es wird also dabei ein besonders hohes Gewicht auf den *Grad* eines Schnittes zu legen sein.

Bei dieser Betrachtung wurde stillschweigend als normaler Fall angenommen, daß in der Herleitung die Schnitte größeren Grades allgemein *über* den Schnitten geringeren Grades stehen. Da das in Wirklichkeit natürlich nicht der Fall zu sein braucht, so tritt an die Stelle des „Grades" der Begriff der „Höhe", was nichts anderes bedeutet, als daß Schnitte niedrigeren Grades *über* Schnitten höheren Grades so behandelt werden, als ob sie auch den höheren Grad besäßen; dann lassen sich die angegebenen Hauptgedanken ohne Schwierigkeit übernehmen.

Bei der Feststellung der Höhe für beliebige Herleitungssequenzen werden ferner *VJ-Schlußfiguren wie Schnitte* betrachtet, da sie ja bei ihrer Reduktion in Schnitte des gleichen Grades aufgelöst würden.

Die Form des Reduktionsschrittes für andere Verknüpfungszeichen.

Wir haben noch nachzutragen, wie der Reduktionsschritt zu modifizieren ist, wenn das äußerste Verknüpfungszeichen der Bundformeln nicht wie in dem ausführlich dargestellten Falle ein V, sondern ein $\&$, $\exists$, $\vee$ oder $\neg$ ist. Die Unterschiede sind nur gering:

Wenn die Bundformeln die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ haben, so denke man sich die obigen Skizzen entsprechend abgeändert: Statt $V x\, \mathfrak{F}(x)$ steht $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, die Verknüpfungs-Schlußfiguren lauten:

$$\frac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \quad \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2} \ \text{bzw.} \ \frac{\mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2}$$

In der neuen Herleitung steht gleichfalls statt $V x\, \mathfrak{F}(x)$ jetzt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, statt $\mathfrak{F}(n)$ steht $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, je nachdem welche der beiden möglichen Formen die rechte Verknüpfungs-Schlußfigur (die „$\&$-Beseitigung") hatte. An der Stelle, wo die linke Verknüpfungs-Schlußfigur wegfällt, wird *darüber* nur die Herleitung von $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A}$ *bzw.* von $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}$ beibehalten, die andere weggelassen. (Dies entspricht der Ersetzung von a durch n im V-Falle.) Sonst vollzieht sich alles genau wie oben; auch die angegebenen Unterschiede ergeben sich ja ganz von selbst.

Ist das äußerste Zeichen der Bundformeln ein $\exists$ oder $\vee$, so vollzieht sich die Reduktion *vollständig symmetrisch* zu den Fällen V und $\&$. Rechts und links sind dann vertauscht.

Haben schließlich die Bundformeln die Gestalt $\neg\, \mathfrak{A}$, so ändert sich auch nichts Wesentliches: Der Formel $\mathfrak{F}(n)$ in der neuen Herleitung entspricht dann die Formel $\mathfrak{A}$, nur tritt diese jetzt bei der Weglassung der *linken* Verknüpfungs-Schlußfigur als zusätzliche *Vorderformel* auf und entsprechend bei der Weglassung der *rechten* Verknüpfungs-Schlußfigur als *Hinterformel*. Sie wird beide Male genau wie sonst bis zu der Sequenz $\Gamma_3 \to \Theta_3$ mitgenommen; das einzig Neue ist, daß jetzt die linke und die rechte Obersequenz des „*neuen Schnittes*", d. h. die ganzen darüberstehenden Herleitungsteile, miteinander zu *vertauschen* sind.

Damit ist die Definition eines Reduktionsschrittes an einer Widerspruchsherleitung beendet.

§ 4. Die Ordnungszahlen. — Schlußbemerkungen.

4.1. *Die transfiniten Ordnungszahlen unterhalb ε_0.*

Ich definiere jetzt die zu verwendenden Ordnungszahlen. Ich will diese nicht wie in der früheren Arbeit als Dezimalbrüche schreiben, sondern mich diesmal an die in der Mengenlehre übliche Bezeichnungsweise anschließen. (Nichtsdestoweniger sind alle in diesem Paragraphen gebrachten Definitionen und Beweise völlig „finit" und in dieser Hinsicht sogar von besonders elementarer Art, ebenso wie die entsprechenden Teile in dem früheren Beweis. Die transfinite Induktion soll ja hier nicht behandelt werden, s. u.)

Rekursive Definition der Ordnungszahlen, zugleich der Gleichheit und Ordnungsbeziehung ($<$) zwischen diesen:

Das System $\mathfrak{S}_0$ besteht aus der Zahl 0. Es gilt: $0 = 0$, und nicht $0 < 0$.

Die Zahlen des Systems $\mathfrak{S}_\varrho$ (ϱ sei eine natürliche Zahl oder 0) seien bereits definiert, ebenso $=$ und $<$-Beziehung zwischen diesen. Dann gilt: Eine beliebige Zahl des Systems $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$ hat die Gestalt

$$\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_\nu},$$

wobei die α Zahlen des Systems $\mathfrak{S}_\varrho$ sind, und zwar $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu$; ν sei eine natürliche Zahl. Ferner gehört auch die Zahl 0 wieder dem System $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$ an.

Eine $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$-Zahl β ist gleich bzw. kleiner bzw. größer als eine $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$-Zahl γ, wenn ihre Darstellungen übereinstimmen bzw. wenn der erste nicht übereinstimmende „Exponent" α in der Darstellung von β kleiner bzw. größer als der entsprechende Exponent in der Darstellung von γ ist. Ist $\beta = \gamma + \cdots$, so ist $\beta > \gamma$. 0 gilt als kleiner als jede andere Zahl. $\beta > \gamma$ bedeutet natürlich dasselbe wie $\gamma < \beta$.

Damit ist die Definition beendet. Man erkennt leicht, daß jedes System alle vorangehenden Systeme in sich enthält, und daß die Beziehungen „kleiner" und „gleich" zwischen zwei Zahlen unabhängig davon sind, welchem System man sie als zugehörig betrachtet; ferner, daß man von einem vorgelegten Ausdruck stets entscheiden kann, ob er eine Ordnungszahl ist oder nicht, sowie daß man von zwei vorgelegten Ordnungszahlen (auf einfache Weise) entscheiden kann, ob sie gleich sind oder welche die kleinere ist. (Damit steht fest, daß diese Begriffe „finit" sind.)

Die in der Zahlendarstellung vorkommenden Zeichen, ‚0', ‚+' und ‚ω', sowie die „Potenzbildung", sind für unsere Zwecke ganz formal aufzufassen, ohne daß man an irgendeinen Sinn derselben, wie etwa daß ω „eine unendliche Zahl" sei und daß das ‚+'-Zeichen der „Addition" entspricht, zu denken braucht. Solche Vorstellungen sind lediglich für das Verständnis der Zusammenhänge von Nutzen. Lediglich zum Vergleich sei noch über den Umfang der einzelnen Systeme, unter Benutzung von Begriffen und Sätzen der Mengenlehre, das Folgende angeführt:

Das System $\mathfrak{S}_1$ besteht aus den Zahlen: $0, \omega^0, \omega^0 + \omega^0, \ldots$
d. h. in üblicher Schreibweise: $0, 1, 2, \ldots$
also aus der Null und den natürlichen Zahlen.

Die Limeszahl des Systems ist ω.

$\mathfrak{S}_2$ enthält bereits alle Zahlen unterhalb ω^ω, nämlich:

$$0, \omega^0, \omega^0+\omega^0, \ldots, \omega^{\omega^0}, \omega^{\omega^0}+\omega^0, \ldots, \omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}, \omega^{\omega^0}+\omega^{\omega^0}+\omega^0, \ldots, \omega^{\omega^0+\omega^0}, \ldots, \omega^{\omega^0+\omega^0+\omega^0}, \ldots,$$

also: $0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots,$
allgemein sämtliche Polynome $\omega^{\nu_1} \cdot \mu_1 + \cdots \omega^{\nu_\sigma} \cdot \mu_\sigma$; die ν und μ seien natürliche Zahlen oder 0; $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_\sigma$.

$\mathfrak{S}_3$ enthält alle Zahlen unter ω^{ω^ω} (d. h. $\omega^{(\omega^\omega)}$; auch im folgenden sind mehrfache Potenzierungen entsprechend aufzufassen). $\mathfrak{S}_4$ enthält alle Zahlen unter $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, usw.

Die Limeszahl sämtlicher Systeme zusammen ist die Zahl ε_0, die „erste ε-Zahl".

Wir wollen das Zeichen 1 als Abkürzung für ω^0 verwenden. Ferner brauchen wir den Begriff der „natürlichen Summe" zweier (von 0 verschiedener) Ordnungszahlen, der wie folgt definiert wird [7]):

Sei $\alpha = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_\mu}$ und $\beta = \omega^{\delta_1} + \omega^{\delta_2} + \cdots \omega^{\delta_\nu}$ ($\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$), dann erhält man die „natürliche Summe $\alpha \# \beta$", indem man die $\mu + \nu$ Glieder ω^γ und ω^δ der Größe nach ordnet und nun alle zusammen wieder mit ‚+'-Zeichen aneinanderreiht, das größte am Anfang, das kleinste am Ende, gleiche Glieder natürlich nebeneinander. So entsteht offenbar wieder eine korrekte Ordnungszahl.

Ein Beispiel: Ist

$$\alpha = \omega^{\omega^1+1} + 1 \quad \text{und} \quad \beta = \omega^{\omega^{\omega^{1+1+1}}+1} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1,$$

so ist

$$\alpha \# \beta = \omega^{\omega^{\omega^{1+1+1}}+1} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1 + 1.$$

Es ist stets $\alpha \# \beta = \beta \# \alpha$. Auch die natürliche Summe beliebig vieler Ordnungszahlen ist unabhängig von der Reihenfolge der einzelnen Summierungen. $\alpha \# \beta > \alpha$. Ist $\alpha^* < \alpha$, so ist $\alpha^* \# \beta < \alpha \# \beta$. Diese Tatsachen sind leicht zu beweisen.

4.2. Die Zuordnung von Ordnungszahlen zu Herleitungen.

Eine beliebige Herleitung liege vor. Ihre Ordnungszahl wird berechnet, indem man, von den obersten Sequenzen beginnend, nach unten hin fortschreitet und dabei jeder einzelnen Herleitungssequenz sowie jedem Schlußstrich eine Ordnungszahl (> 0) auf Grund der folgenden Bestimmungen zuweist:

Jede oberste Sequenz erhält die Ordnungszahl 1 (d. h. ω^0).

Die Ordnungszahlen der Obersequenzen einer Schlußfigur seien bereits ermittelt. Dann erhält man die Ordnungszahl des Schlußstriches wie folgt:

Handelt es sich um eine Struktur-Schlußfigur, so übernimmt man die Ordnungszahl der Obersequenz ungeändert, bzw. im Falle eines Schnittes bildet man die natürliche Summe der Ordnungszahlen der beiden Obersequenzen.

Handelt es sich um eine Verknüpfungs-Schlußfigur, so fügt man der Ordnungszahl der Obersequenz $+ 1$ hinten an; hat sie jedoch zwei Obersequenzen, so nimmt man die größere von beiden und fügt dieser $+ 1$ an.

Liegt schließlich eine VJ-Schlußfigur vor — die Ordnungszahl der Obersequenz sei $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_\nu}$ ($\nu \geq 1$) —, so nimmt man als Ordnungszahl des Schlußstrichs ω^{α_1+1}. Ist $\alpha_1 = 0$, so ist natürlich ω^1 gemeint.

Aus der Ordnungszahl eines Schlußstrichs — sie heiße α — erhält man die Ordnungszahl der Untersequenz der betreffenden Schlußfigur auf folgende Weise:

Ist die Höhe der Untersequenz die gleiche wie die der Obersequenzen, so ist ihre Ordnungszahl gleich α. Ist ihre Höhe um 1 niedriger, so lautet ihre Ordnungszahl ω^α. Ist sie um 2 niedriger, so lautet die Ordnungszahl ω^{ω^α}, um 3: $\omega^{\omega^{\omega^\alpha}}$, usw.

Die Ordnungszahl, welche man schließlich für die Endsequenz der Herleitung erhält, ist die Ordnungszahl der Herleitung.

Man überzeugt sich leicht, daß bei den genannten Operationen immer wieder wirkliche Ordnungszahlen, gemäß deren Definition, entstehen. — Ich gebe vorläufig keine Erläuterungen

[7]) Vgl. G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre. (Sonderdruck a. d. Abh. d. Friesschen Schule, N. F., 1. Bd., 4. Heft; S. 479—706.) Göttingen 1906.

zur Zuordnung der Ordnungszahlen; dieselbe ist ja recht einfach; das einzig Besondere ist die Bewertung der VJ-Schlußfiguren und des Höhenunterschiedes; beide werden am leichtesten verständlich, wenn man nachher ihre Wirkungsweise sieht.

4.3. Die Verkleinerung der Ordnungszahl bei Durchführung eines Reduktionsschrittes an einer Widerspruchsherleitung.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Ordnungszahl einer Widerspruchsherleitung bei Durchführung eines Reduktionsschrittes gemäß § 3 verkleinert wird. Das macht keine besonderen Schwierigkeiten mehr; wir haben nichts weiter zu tun, als die Richtigkeit der Behauptung sorgfältig für alle Einzelfälle nachzuprüfen.

Durch den Vorbereitungsschritt 3.2 wird offenkundig die Ordnungszahl überhaupt nicht beeinflußt. Wie steht es nun bei der VJ-Reduktion (3.3)?

Die Ordnungszahl der Obersequenz der VJ-Schlußfigur möge $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_\nu}$ lauten ($\nu \geq 1$), die des Schlußstrichs also ω^{α_1+1}. Dies ist zugleich schon die Ordnungszahl der Untersequenz, deren Höhe nicht geringer sein kann als die der Obersequenz, da weiter unten in der Herleitung noch die zu $\mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(n)$ gehörigen Bundschnitte, die den gleichen Grad haben wie die VJ-Schlußfigur, vorkommen müssen. Betrachten wir nun die als Ersatz der VJ-Schlußfigur bei der Reduktion auftretende Figur (zunächst für n ungleich 1). Von deren obersten Sequenzen erhält offenbar in der neuen Herleitung jede einzelne die gleiche Ordnungszahl $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_\nu}$. Nun haben alle Sequenzen der Ersatzfigur die gleiche Höhe, nämlich dieselbe, welche zuvor die beiden Sequenzen der VJ-Schlußfigur hatten. (Die neu aufgetretenen Schnitte haben ja denselben Grad, den die VJ-Schlußfigur hatte.) Daher ist die Ordnungszahl der untersten Sequenz dieser Figur offenbar gleich der natürlichen Summe der sämtlichen Zahlen $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_\nu}$. Sie beginnt folglich: $\omega^{\alpha_1} + \cdots$. Sie ist also kleiner als ω^{α_1+1}, gemäß der Definition von „kleiner" für die Ordnungszahlen.

Daraus folgt nun leicht, daß auch die Ordnungszahl der gesamten Herleitung verkleinert worden ist. Nach unten hin hat sich ja am übrigen Verlauf der Herleitung nichts geändert, auch alle Höhen sind dort die gleichen geblieben. Die an einer Stelle eingetretene Verkleinerung bleibt bei der Weiterberechnung der Ordnungszahl bis zur Endsequenz hin erhalten; wesentlich ist, daß dabei nur noch Struktur-Schlußfiguren passiert werden, und daß folgendes gilt: Ist $\alpha^* < \alpha$, so ist auch $\omega^{\alpha^*} < \omega^\alpha$ und $\alpha^* \# \beta < \alpha \# \beta$. ($\alpha, \alpha^*$ und β seien $\neq 0$.) Beides ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

Nun wird auch der Zweck des ω^{α_1+1} bei der Bewertung einer VJ-Schlußfigur deutlich: Bei der Reduktion zerfällt diese in eine Anzahl von Schnitten; es tritt gleichsam das n-fache Vielfache ein und desselben Herleitungsteiles auf. Damit eine Verkleinerung der Ordnungszahl erreicht wird, muß als Ordnungszahl des ursprünglichen Herleitungsteiles bis zu der VJ-Schlußfigur die „Limeszahl" aller „n-fachen Vielfachen" der Ordnungszahl der Obersequenz gewählt werden, das ist $\omega^{\alpha_1+1} =$ „$\omega^{\alpha_1} \cdot \omega$". (Die in „" gesetzten Begriffe dienen natürlich nur zur Erläuterung; sie sind ja für uns gar nicht definiert.)

Es bleibt noch der Fall n gleich 1 zu erledigen: Die Sequenz $\mathfrak{F}(1), \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}(1)$ erhält in der neuen Herleitung die Ordnungszahl 1. In der alten Herleitung war ihre Ordnungszahl mindestens gleich ω^1. Also liegt offenkundige Verkleinerung vor, die sich gleichfalls auf die Ordnungszahl der Gesamtherleitung überträgt.

Damit ist die Verkleinerung der Ordnungszahl einer Widerspruchsherleitung bei einer VJ-Reduktion erwiesen. Es bleibt noch die Verknüpfungs-Reduktion zu erledigen. Da ist zunächst festzustellen, daß durch den weiteren Vorbereitungsschritt (3.4 2) keine

Vergrößerung der Ordnungszahl eintreten kann. Das ist, trotz der äußerlich offenbaren Vereinfachung der Herleitung bei diesem Schritt, nicht so ganz leicht nachzuweisen. Ich will nur kurz angeben, welche Überlegungen dazu anzustellen sind — der nur für das Wesentlichste interessierte Leser mag diesen Absatz überschlagen —:

Das Weglassen, Hinzufügen und sonstige Veränderungen innerhalb von Struktur-Schlußfiguren außer Schnitten hat keinerlei Einfluß auf die Ordnungszahl. Wohl aber die Streichung eines Schnittes unter Fortlassung einer Obersequenz mit allem, was über ihr steht. Beachten wir zunächst die dadurch eintretenden Höhenänderungen nicht, so liegt eine Verkleinerung der Ordnungszahl vor, indem die natürliche Summe zweier Zahlen durch eine von beiden ersetzt wird. Nun kommt aber hinzu, daß durch den Fortfall eines Schnittes offenbar eine ganze Menge von Sequenzen oberhalb dieses Schnittes an Höhe mehr oder weniger verlieren können (und nicht nur im Endstück, sondern in der ganzen Herleitung). Um zu erkennen, daß auch diese ziemlich unübersichtliche Veränderung keine Vergrößerung der Ordnungszahl der gesamten Herleitung bewirken kann, schließen wir so: Wir denken uns, wir könnten die Höhen ganz beliebig festsetzen. Wir beginnen mit der alten Herleitung, lassen den Schnitt weg und lassen zunächst alle Höhen bestehen. Nun ändern wir die Höhen allmählich bis zu den der geänderten Herleitung in Wahrheit nach der Höhendefinition zukommenden Werten ab, indem wir lauter Einzelschritte folgender Art nacheinander ausführen: Es wird jeweils die Höhe der Obersequenzen einer Schlußfigur, deren Untersequenz eine geringere Höhe hat als die Obersequenzen, um 1 verringert. Aus solchen Operationen läßt sich, wie leicht zu ersehen, die gesamte Änderung der Höhen in der Tat zusammensetzen. (Man beginnt von unten her.) Was geschieht nun mit den Ordnungszahlen bei einer solchen einzelnen Höhenänderung? Die Ordnungszahlen der Obersequenzen (ist es nur eine, so denke man sich die zweite weg) vor der Änderung seien α und β. Nach der Änderung lauten sie dann ω^α und ω^β. (Außer wenn eine Obersequenz eine oberste Sequenz der Herleitung ist, dann war und bleibt ihre Ordnungszahl gleich 1, und die folgende Betrachtung vereinfacht sich noch.) Die Ordnungszahl des Schlußstrichs lautete vor der Änderung, je nachdem um was für eine Schlußfigur es sich handelt, α oder $\alpha \# \beta$ oder $\alpha + 1$, bzw. $\beta + 1$, oder ω^{α_1+1} (im Falle einer VJ-Schlußfigur mit $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots$). Nach der Änderung lautet sie bez. ω^α oder $\omega^\alpha \# \omega^\beta$ oder $\omega^\alpha + 1$, bzw. $\omega^\beta + 1$, oder $\omega^{\alpha+1}$. Nun die Untersequenz: Wenn der Höhenunterschied zwischen dieser und den Obersequenzen vorher gleich 1 war, nachher also gleich 0 ist, so ist ihre Ordnungszahl durch die Änderung verändert worden von ω^α zu ω^α oder von $\omega^{\alpha \# \beta}$ zu $\omega^\alpha \# \omega^\beta$ oder von $\omega^{\alpha+1}$ zu $\omega^\alpha + 1$, bzw. von $\omega^{\beta+1}$ zu $\omega^\beta + 1$, oder schließlich von $\omega^{\omega^{\alpha_1+1}}$ zu $\omega^{\omega^{\alpha_1+\cdots+1}}$. In jedem Falle ist die Ordnungszahl entweder die gleiche geblieben oder kleiner geworden, wie man auf Grund der „kleiner"-Definition von Fall zu Fall nachprüfen möge. War der Höhenunterschied zwischen Ober- und Untersequenzen größer als 1, so ändert sich nichts Wesentliches: Es kommen nur zu den genannten Zahlen noch jeweils gleich viele Potenzerhebungen mit ω hinzu. Die Tatsache des Nicht-größer-werdens überträgt sich auf die Ordnungszahl der gesamten Herleitung, die somit weder bei einem einzelnen derartigen Höhenänderungsschritt noch überhaupt bei dem gesamten Vorbereitungsschritt zur Verknüpfungs-Reduktion zunehmen kann.

Nun kommen wir zu der eigentlichen Verknüpfungs-Reduktion (3.5), bei der wir eine Verkleinerung der Ordnungszahl nachzuweisen haben. Wir legen wieder den oben ausführlich dargestellten Fall (ein V als zu reduzierendes Verknüpfungszeichen) zugrunde. Die Ordnungszahl jedes der beiden unmittelbar über den Sequenzen $\Gamma_3 \rightarrow \mathfrak{F}(n)$, Θ_3 und

$\Gamma_3, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \Theta_3$ stehenden Schlußstriche in der neuen Herleitung — bezeichnen wir sie mit α_1 bzw. α_2 — ist kleiner als die Ordnungszahl α der „Höhenlinie" in der alten Herleitung. Denn die darüberstehenden Herleitungsteile entsprechen einander in der Hauptsache, insbesondere sind alle Höhen die gleichen wie in der alten Herleitung — die Höhen der unmittelbar über den genannten Schlußstrichen stehenden Sequenzen sind durchweg gleich ϱ —, lediglich eine Verknüpfungs-Schlußfigur ist jeweils fortgefallen und durch Struktur-Schlußfiguren, welche auf die Ordnungszahl keinen Einfluß haben, ersetzt worden. Daher ist an dieser Stelle eine Verkleinerung der Ordnungszahl eingetreten, welche durch die nachfolgenden Struktur-Schlußfiguren hindurch bis zu den genannten Schlußstrichen erhalten bleibt. Weiter: Die Sequenz $\Gamma_3 \to \Theta_3$ hat in der neuen Herleitung natürlich die gleiche Höhe σ wie in der alten; $\sigma < \varrho$. Ebenso hat natürlich die Sequenz $\Gamma_3, \Gamma_3 \to \Theta_3, \Theta_3$ die Höhe σ. Für die Höhe τ der Obersequenzen des „neuen Schnittes" gilt: $\varrho > \tau \geqq \sigma$. Der zweite Teil ist selbstverständlich; und daß $\varrho > \tau$ ist, erkennt man so: Nach der Höhendefinition ist τ gleich der größeren der beiden Zahlen σ und „Grad von $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$". Ist $\tau = \sigma$, so ist $\tau < \varrho$, da $\sigma < \varrho$. Ist τ gleich dem Grad von $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, so ist $\tau < \varrho$, da der Grad von $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ kleiner als der Grad von $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und ϱ mindestens gleich dem letzteren ist.

Nehmen wir nun zunächst einmal an, daß die Differenzen zwischen den Höhen ϱ, τ und σ die Mindestwerte besitzen, d. h. daß $\varrho = \tau + 1$ und $\tau = \sigma$ sei. Dann vollzieht sich der Abschluß unseres Nachweises wie folgt: In der alten Herleitung hatte die Höhenlinie die Ordnungszahl α, die Sequenz $\Gamma_3 \to \Theta_3$ also die Ordnungszahl ω^α. In der neuen Herleitung haben die der Höhenlinie entsprechenden Schlußstriche die Ordnungszahlen α_1 und α_2, beide kleiner als α, die Obersequenzen des neuen Schnitts also die Ordnungszahlen ω^{α_1} und ω^{α_2}; die Sequenz $\Gamma_3 \to \Theta_3$ erhält die Ordnungszahl $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}$. (Es sei, o. B. d. A., $\alpha_1 \geqq \alpha_2$.) Diese ist offenbar kleiner als ω^α; und damit sind wir fertig. Denn diese Verkleinerung überträgt sich, auf Grund einer schon mehrmals angewandten Überlegung, auf die Ordnungszahl der Endsequenz und damit der gesamten Herleitung. (Unterhalb von $\Gamma_3 \to \Theta_3$ hat sich ja nichts geändert.)

Wenn die Abstände zwischen den Höhen ϱ, τ und σ größer sind, ändert sich nichts Wesentliches an unserer Betrachtung. Es tritt dann lediglich an die Stelle der Ungleichung

$$\omega^\alpha > \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} \qquad (\text{mit } \alpha > \alpha_1 \geqq \alpha_2)$$

die Ungleichung

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}} > \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1}}}}}} + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_2}}}}}$$

und diese ist, wie leicht ersichtlich, gleichfalls gültig.

Man erkennt nun, wie durch die Art der Definition der Ordnungszahlen im Zusammenhang mit dem Begriff der Höhe die mit der scheinbaren Kompliziertheitszunahme bei der Verknüpfungs-Reduktion zusammenhängenden Schwierigkeiten überwunden wurden. Der Hauptgedanke ist: Bei der Reduktion tritt derselbe Herleitungsteil, zwar beide Male etwas vereinfacht, zweimal auf. Nun ist aber im allgemeinen Falle $\alpha < \alpha_1 + \alpha_2$, wobei α_1 und α_2 kleiner als α seien. Wohl aber gilt für die Potenz: $\omega^\alpha > \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}$. (Wie bei natürlichen Zahlen, für ω kann eine Zahl $\geqq 3$ gesetzt werden.) Damit ist die „Vereinfachung" der Gesamtfigur erreicht, sofern es nur immer möglich ist, eine Potenzierung einzuschieben; und das wird ermöglicht durch den Umstand, daß der Grad des neuen Schnittes kleiner ist als der Grad des alten $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$-Schnittes. Der Auswertung dieses Umstandes

dient der allgemeine Begriff der Höhe und die Bezugnahme auf diesen bei der Ordnungszahlen-Zuordnung.

Die Fälle, wo das zu reduzierende Verknüpfungszeichen ein $\&$, $\exists$, $\vee$ oder $\neg$ ist, sind so gleichartig zu erledigen, daß sich ein besonderes Eingehen darauf erübrigt.

Damit ist die Verkleinerung der Ordnungszahl einer Widerspruchsherleitung bei jedem Reduktionsschritt erwiesen.

4.4. Schlußbemerkungen.

Hätten wir in unserem Formalismus keine VJ-Schlußfiguren zugelassen, so wäre es möglich, mit natürlichen Zahlen als Ordnungszahlen auszukommen. Um dies zu erkennen, lasse man 4.1 weg und setze in 4.2 statt ω durchweg 3, statt „natürliche Summe" einfach „Summe". Summe und Potenz sind in der für natürliche Zahlen üblichen Bedeutung aufzufassen. Dann bleibt, wie man leicht nachprüft, 4.3 durchweg gültig; dabei ist die VJ-Reduktion natürlich fortzulassen. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis ließe sich dann also statt durch eine transfinite Induktion durch eine gewöhnliche vollständige Induktion abschließen.

Mit Zulassung der VJ-Schlußfiguren, also für unseren Formalismus, gilt der folgende bemerkenswerte Zusammenhang zwischen der Größe der Ordnungszahl einer Herleitung und dem höchsten Grad der in der Herleitung vorkommenden Formeln: Die Ordnungszahl einer Herleitung, in der nur Formeln vom Grade 0 vorkommen, ist kleiner als ω^ω (d. h. ω^{ω^1} in unserer Schreibweise). Ist der höchste Formelgrad gleich 1, so ist die Ordnungszahl kleiner als ω^{ω^ω}, ist er gleich 2, so ist sie kleiner als $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, usw. Dies zu beweisen ist nicht schwierig.

Diese Sätze haben natürlich nur eine Bedeutung relativ zu unserer besonderen Ordnungszahlen-Zuordnung. Immerhin ist anzunehmen, daß diese im großen und ganzen schon ziemlich optimal ist, d. h. daß man nicht mit wesentlich niedrigeren Ordnungszahlen auskommen könnte. Insbesondere kann die Gesamtheit unserer Herleitungen nicht mit Ordnungszahlen erledigt werden, die alle unter einer Zahl, die kleiner als ε_0 ist, liegen. Denn die transfinite Induktion bis zu einer solchen Zahl läßt sich in unserem Formalismus selbst beweisen; daher würde ein mit dieser geführter Widerspruchsfreiheitsbeweis dem Gödelschen Satz widersprechen (vorausgesetzt natürlich, daß die sonst verwendeten Beweismittel, insbesondere die Zuordnung der Ordnungszahlen, nicht eine über die Darstellbarkeit im zahlentheoretischen Formalismus hinausgehende Gestalt annehmen). Auf demselben Umweg kann man wahrscheinlich auch zeigen, daß gewisse Teilklassen von Herleitungen sich nicht mit Ordnungszahlen unterhalb gewisser $\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}$ erledigen lassen können. Wahrscheinlich wird sich auch einmal ein direkterer Weg zum Beweis solcher Unmöglichkeitssätze finden lassen.

Wenn wir beliebige Funktionen in unseren Formalismus einbeziehen, so bleibt der Widerspruchsfreiheitsbeweis, mit geringfügigen Zusätzen, gültig: Es ist nichts weiter zu tun, als daß bei der Reduktion, etwa im Anschluß an den ersten Vorbereitungsschritt, alle Terme ohne freie Variable auszurechnen und durch ihre Zahlenwerte zu ersetzen sind. Die Ausrechenbarkeit aller Funktionen, für alle bestimmten Zahlenwerte, wird vorausgesetzt. Es ergeben sich noch gewisse formale Schwierigkeiten aus dem Umstand, daß ein Term an einer Stelle ausrechenbar sein kann, während ein ihm entsprechender Ausdruck an anderer Stelle in derselben Schlußfigur noch eine Variable enthält (vgl. Nr. 14.2 2 der früheren Arbeit); doch diese berühren das Wesentliche nicht.

Der Inhalt des V. Abschnitts der früheren Arbeit bleibt sinngemäß auch gültig für die neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises. Die „Reduzierbarkeit" beliebiger herleitbarer Sequenzen habe ich nicht neu bewiesen; ich lege auch keinen besonderen Wert auf diese. (Ich habe sie damals als ein Argument gegen den radikalen Intuitionismus herangezogen — Nr. 17.3 —, doch ist sie für diesen Zweck nicht besonders wesentlich.)

Die transfinite Induktion.

Die den Widerspruchsfreiheitsbeweis abschließende transfinite Induktion habe ich nicht neu bewiesen, da ich später einmal eine gesonderte Darstellung der damit zusammenhängenden Fragen beabsichtige. Vorläufig ist also zum Abschluß des vorliegenden Beweises der frühere Beweis des „Satzes der transfiniten Induktion" (Nr. 15.4 mit 15.1) zu übernehmen. Zu diesem Zwecke wären die neuen Ordnungszahlen auf die damals verwendeten Dezimalbrüche abzubilden; das macht keine besonderen Schwierigkeiten. (Beide Systeme besitzen ja den gleichen „Ordnungstypus ε_0".)

Die transfinite Induktion nimmt innerhalb des Widerspruchsfreiheitsbeweises eine ganz besondere Stellung ein. Während alle sonst verwendeten Schlußweisen, vom Gesichtspunkt der „Finitheit" betrachtet, ganz elementarer Art sind — das gilt für den neuen Beweis genau so wie für den alten —, kann man dies von der transfiniten Induktion nicht behaupten. Daher liegt hier eine Aufgabe ganz anderer Art vor: Nicht sie zu beweisen ist wesentlich — das ist nicht besonders schwer und auf verschiedene Arten möglich — vielmehr sie auf finiter Grundlage zu beweisen, d. h. klar herauszustellen, daß sie eine mit dem Grundsatz der konstruktiven Auffassung des Unendlichen in Übereinstimmung befindliche Schlußweise ist; eine nicht mehr rein mathematische Angelegenheit, die aber nun einmal bei einem Widerspruchsfreiheitsbeweis auch zur Sache gehört.

Man könnte geneigt sein, den finiten Charakter der „trans-finiten" Induktion zu bezweifeln, und sei es nur ihres anrüchigen Namens wegen. Demgegenüber sei hier nur darauf hingewiesen, daß die meisten irgendwie konstruktivistisch eingestellten Autoren ausdrücklich Wert darauf legen, ein Anfangsstück der transfiniten Zahlenreihe (innerhalb der „II. Zahlklasse") konstruktiv aufzubauen (etwa bis ω^ω z. B.). Und auch beim Widerspruchsfreiheitsbeweis und etwaigen zukünftigen Erweiterungen desselben handelt es sich jedenfalls nur um ein Anfangsstück, einen „Abschnitt" der II. Zahlklasse, wenn auch um ein vergleichsweise schon ziemlich weitgehendes und für einen Widerspruchsfreiheitsbeweis der Analysis wahrscheinlich noch erheblich weitergehendes Anfangsstück. Ich wüßte jedoch nicht recht, an welcher „Stelle" hierbei das konstruktiv Unbedenkliche aufhören und die Weiterführung der transfiniten Induktion anfangen sollte, bedenklich zu werden. Ich glaube vielmehr, daß sich die Unbedenklichkeit des ganzen für den Widerspruchsfreiheitsbeweis benötigten Bereichs zu jenen ersten Anfängen, etwa bis ω^2, nicht anders verhält als die Unbedenklichkeit einer hundert Seiten langen Zahlenrechnung zu einer Rechnung von wenigen Zeilen: Es ist lediglich eine erheblich umfangreichere Angelegenheit, sich davon von Anfang bis zu Ende zu überzeugen! Ein ausführliches Eingehen auf diese Dinge (deren Darstellung in der früheren Arbeit — Nr. 16.11 — mir jetzt als etwas zu knapp erscheint) soll, wie gesagt, später einmal erfolgen.